

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI

FACOLTA' DI INGEGNERIA

- DIPARTIMENTO DI INFORMATICA E SISTEMISTICA -

**ALGORITMI DI SOLUZIONE AL
PROBLEMA CINEMATICO INVERSO
PER ROBOT DI MANIPOLAZIONE**

Bruno SICILIANO

Dicembre 1986

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA
IN INGEGNERIA ELETTRONICA E INFORMATICA

*"If you are not failing your time,
you are not doing R & D.
If everything works,
you are not asking tough enough questions"*

PREFAZIONE

Che cos'è un Robot? Forse a questa domanda ognuno di noi troverebbe una risposta ispirandosi alle proprie capacità di immaginazione. Forse ad un livello alto di astrazione è lecito affermare che quando si pensa ad un robot, si pensa ad un essere antropomorfo in grado di riprodurre le funzioni intelligenti dell'Uomo. D'altra parte c'è il fascino della parola stessa 'Robot' ("robò", pronunciato all'italiana in maniera non del tutto corretta, ma estremamente efficace per farsi comprendere) che attrae l'uomo della strada e, perché no, anche lo studente di ingegneria meccanica o elettronica. Come ad es. il sottoscritto che qualche anno fa, fresco laureato in ingegneria elettronica, si fece catturare da tale fascino, spinto dal desiderio di capire cosa ci fosse dietro quel termine che suona come qualcosa di magico, di metafisico. Che le letture giovanili di Asimov abbiano avuto parte in causa ... ed eccomi qui a scrivere dell'attività di studio e di ricerca che ha scandito i tre anni più recenti della mia vita.

La scrittura di una tesi di Dottorato rappresenta forse un momento di riflessione nella vita di una persona orientata alla ricerca scientifica. Nel caso personale, infatti, essa ha rappresentato l'occasione per la verifica di quelle convinzioni maturate durante questo tempo. Forse il Problema Cinematico Inverso di Manipolatori, che è poi l'argomento di questa dissertazione, rappresenta solo una piccola tessera di quel vasto mosaico che è lo studio della Robotica oggi. E' opinione dell'autore, tuttavia, che solo partendo dalle fondamenta di un problema, si abbiano poi buone "chances" di comprenderlo a fondo, ed eventualmente risolverlo. Non a caso, il Controllo di un Robot, inteso come controllo del sistema elettromeccanico, sta sul gradino più basso di quella scala gerarchica che caratterizza la Programmazione

di un Robot. Di qui forse l'entusiasmo nel dedicarmi a questa attività di ricerca, entusiasmo che spero di aver trasmesso anche nella stesura di questo lavoro.

Il momento della scrittura della tesi rappresenta per me anche un'occasione per ringraziare quanti mi sono stati d'aiuto in questi tre anni. Il Prof. Lorenzo Sciavicco ha rappresentato per me un polo di riferimento costante, trasmettendomi quell'atteggiamento critico nella ricerca che è condizione necessaria, ma non sufficiente, per ottenere dei buoni risultati. I miei ringraziamenti vanno necessariamente anche al Prof. Aldo Balestrino per le libere ispirazioni, a Giuseppe De Maria per le animate discussioni, a Giuseppe Ambrosino che ha il merito (?) di avermi introdotto nell'ambiente di lavoro in cui opero e agli altri collaboratori del gruppo di Controlli Automatici del Dipartimento di Informatica e Sistemistica dell'Università di Napoli. Tornando qualche anno indietro, alcuni degli insegnamenti ricevuti nel Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica si sono poi rivelati preziosi: l'impronta dei corsi di Fisica 1 (Prof. V. Silvestrini), Teoria dei Sistemi (Prof. G. Celentano), Calcolatori Elettronici (Prof. A. Esposito), Macchine e Impianti Elettrici (Prof. B. Macchiaroli), Radiotecnica (Prof. F.S. Immirzi) è stata forse determinante alla maturazione di una certa forma mentis tipicamente ingegneristica.

Una menzione speciale va poi alla mia famiglia che mi ha sostenuto con l'affetto ed il calore di sempre, credendo forse più di tutti nelle mie possibilità, e a Carla per la sua dolcezza e la 'soportazione' nei momenti più critici, aiutandomi a superarli con quella sua invidiabile filosofia di vita; un grazie anche a tutti gli amici, e i meno amici, per i bei momenti vissuti insieme, che si sono alternati numerosi, durante questi anni, con lo studio e la ricerca.

Bruno Siciliano
Napoli, Dicembre 1986

SOMMARIO

In tale studio si propone un algoritmo di soluzione innovativo al problema cinematico inverso di manipolatori. Una versione generale dell'algoritmo viene prima ricavata dalla riformulazione in termini dinamici del problema cinematico inverso, e se ne discutono i vantaggi in rapporto ad un metodo di soluzione di tipo tradizionale.

L'algoritmo stesso viene poi particolarizzato per tre strutture cinematiche fondamentali, in relazione agli assi di moto dell'organo terminale del manipolatore. Tale operazione è resa possibile dall'individuazione di opportune proprietà cinematiche di cui godono le matrici Jacobiane a mezzo delle quali è definito l'orientamento dell'organo terminale, nonché di quei vincoli cinematici caratteristici di ogni struttura presa in esame. I risultati delle simulazioni, relativi a due esempi di inversione cinematica di una traiettoria, in posizione e orientamento, assegnata all'organo terminale, mostrano che le prestazioni in inseguimento ed a regime dell'algoritmo sono molto soddisfacenti.

Infine si propone di estendere opportunamente l'algoritmo di soluzione al caso di manipolatori ridondanti, per i quali si abbiano vincoli dovuti alla presenza di ostacoli nello spazio di lavoro del manipolatore e/o all'esistenza di limiti meccanici sulla corsa dei giunti. In conclusione sono riportati anche i risultati delle simulazioni relativi ad un semplice caso di applicazione ad un manipolatore planare ridondante.

INDICE DEI CONTENUTI

PREFAZIONE	i
SOMMARIO	iii
INDICE DEI CONTENUTI	iv
INDICE DELLE TABELLE	vii
INDICE DELLE FIGURE	viii
1. INTRODUZIONE	1
1.1 Il concetto di robotica	1
1.2 La meccanica e il controllo di manipolatori	3
1.3 Nomenclatura	16
Bibliografia	17
2. DESCRIZIONE DELLO SPAZIO E TRASFORMAZIONI DI COORDINATE	18
2.1 Posizione ed orientamento di un corpo rigido	18
2.2 Trasformazioni di coordinate	20
2.3 Angoli di Eulero	23
2.4 Trasformazioni omogenee	27
Bibliografia	31
3. MODELLO CINEMATICO DI UN MANIPOLATORE	32
3.1 Catena cinematica aperta	32
3.2 Parametri cinematici caratteristici	34

3.3	Equazioni cinematiche	39
3.4	Due esempi	42
3.4.1	Il manipolatore di Stanford	44
3.4.2	Il manipolatore prototipo	47
3.5	Cinematica differenziale	50
3.5.1	Spostamenti infinitesimali	50
3.5.2	Rotazioni infinitesimali	54
3.6	Calcolo dello Jacobiano di un manipolatore	58
3.7	Una rappresentazione alternativa dello Jacobiano	62
	Bibliografia	67
4.	PROBLEMA CINEMATICO INVERSO	68
4.1	Introduzione	68
4.2	Esistenza di una soluzione	69
4.3	Soluzioni multiple	72
4.4	Soluzione dell'equazione cinematica per il manipolatore di Stanford	74
4.5	Risolubilità	84
4.6	Tecniche di soluzione numeriche	86
4.7	Controllo cinematico in velocità: Singularità	87
	Bibliografia	94
5.	UN ALGORITMO GENERALE DI SOLUZIONE	95
5.1	Introduzione	95
5.2	L'algoritmo generale di soluzione	95
5.3	Caratteristiche dell'algoritmo di soluzione	99
5.4	Caratterizzazione cinematica dell'algoritmo	102
	Bibliografia	105
6.	L'ALGORITMO PER DIFFERENTI STRUTTURE CINEMATICHE	106
6.1	Introduzione	106
6.2	Configurazione degli assi di rotazione terminali	106
6.3	Polso sferico	111
6.4	Assi che si intersecano a due a due	119
6.5	Assi sghembi	125
6.6	Due esempi di applicazione	129
6.6.1	Manipolatore di Stanford	129
6.6.2	Manipolatore prototipo	132
	Bibliografia	143

7.	IL CASO DEI MANIPOLATORI RIDONDANTI	144
7.1	Il concetto di ridondanza cinematica	144
7.2	Soluzioni ottime	148
7.3	Il problema cinematico inverso di manipolatori ridondanti	150
7.4	Estensione dell'algoritmo ai manipolatori ridondanti	154
7.4.1	Presenza di ostacoli	155
7.4.2	Limiti meccanici ai giunti	159
7.4.3	La soluzione complessiva	160
7.5	Un esempio	163
	Bibliografia	172
8.	CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI	174
8.1	Sintesi delle conclusioni	174
8.2	Suggerimenti per il lavoro futuro	175
	APPENDICE 1	177
	APPENDICE 2	179

INDICE DELLE TABELLE

3.1	Parametri cinematici del manipolatore di Stanford	45
3.2	Parametri cinematici del manipolatore prototipo	48
6.1	Parametri scelti per i profili di velocità di Fig. 6.7	131
6.2	Parametri scelti per il profilo di velocità di Fig. 6.15	139

INDICE DELLE FIGURE

1.1	Terne di coordinate vengono associate al manipolatore e agli oggetti nell'ambiente	5
1.2	Le equazioni cinematiche descrivono la terna associata all'organo terminale rispetto alla terna base del manipolatore in funzione delle variabili di giunto	5
1.3	Per una posizione ed un orientamento dell'organo terminale assegnati, i valori delle variabili di giunto possono essere calcolati usando la cinematica inversa	8
1.4	Il legame geometrico tra le velocità ai giunti e le velocità dell'organo terminale può essere descritto da una matrice chiamata Jacobiano	8
1.5	La relazione tra le coppie applicate dagli attuatori ai giunti ed il moto risultante del manipolatore è descritta dalle equazioni dinamiche del moto	11
1.6	Allo scopo di muovere l'organo terminale del manipolatore nello spazio dal punto A al punto B, si devono calcolare le traiettorie che i singoli giunti devono inseguire	11
1.7	Allo scopo di consentire al manipolatore di inseguire una traiettoria desiderata, bisogna implementare un sistema di controllo di posizione. Tale sistema fa uso dei segnali di reazione provenienti dai sensori ai giunti per mantenere il manipolatore in traiettoria	13
1.8	Allo scopo di permettere al manipolatore di scivolare lungo una superficie applicando allo stesso tempo una forza di contatto, bisogna adottare un sistema di controllo ibrido di posizione-forza	13
1.9	I movimenti desiderati dell'organo terminale del manipolatore, le forze di contatto desiderate e le strategie complesse di manipolazione possono venir descritti in un linguaggio di programmazione per robot	15
2.1	Posizione ed orientamento di un corpo rigido	19

2.2	Trasformazione di coordinate	19
2.3	Le tre rotazioni consecutive necessarie a definire gli angoli di Eulero	24
2.4	Trasformazioni di coordinate consecutive	29
3.1	Catena cinematica aperta	33
3.2	La notazione di Denavit-Hartenberg	36
3.3	La relazione tra terne di coordinate adiacenti nella notazione di Denavit-Hartenberg	38
3.4	La rappresentazione della posizione e dello orientamento dell'organo terminale con una matrice (4 x 4)	41
3.5	Collocazione della terna di coordinate dello organo terminale	43
3.6	Collocazione della terna di coordinate di base	43
3.7	Il manipolatore di Stanford	45
3.8	Il manipolatore prototipo	48
3.9	Il manipolatore planare a due gradi di libertà	51
3.10	Il vettore delle rotazioni infinitesimali	57
3.11	Rotazioni di angoli finite	57
3.12	Spostamenti infinitesimali dell'organo terminale generati dai singoli giunti	59
4.1	Manipolatore a due bracci di lunghezze l_1 ed l_2	71
4.2	Manipolatore a tre bracci. Le linee tratteggiate indicano una seconda soluzione	73
4.3	Una delle possibili soluzioni per raggiungere il punto B provoca una collisione	73
4.4	Scheletro della struttura del manipolatore di Stanford	76
4.5	Configurazioni multiple dei giunti della spalla	80
4.6	Configurazioni multiple dei giunti del polso	83

4.7	Velocità del punto terminale del manipolatore planare a due gradi di libertà	89
4.8	Inseguimento di una traiettoria che passa in prossimità di punti singolari	91
4.9	Profili delle velocità risultanti ai giunti	93
5.1	Lo schema generale di inversione cinematica	98
6.1	Gli ultimi tre assi di rotazioni all'organo terminale: (a) concorrenti, (b) si intersecano a due a due, (c) sghembi	108
6.2	Schema di inversione cinematica: primo stadio	114
6.3	Schema di inversione cinematica: secondo stadio	118
6.4	Requisiti geometrici nello spazio Cartesiano per il primo stadio dell'algoritmo	121
6.5	Schema di inversione cinematica: primo stadio	123
6.6	Schema di inversione cinematica: secondo stadio	126
6.7	Profili di velocità assegnati nello spazio Cartesiano: (a) triangolare, (b) trapezoidale	131
6.8	Errori di inseguimento di posizione per le traiettorie più veloci: (a) profilo triangolare, (b) profilo trapezoidale	133
6.9	Errori di inseguimento di posizione per le traiettorie più lente: (a) profilo triangolare, (b) profilo trapezoidale	133
6.10	Errori di inseguimento di orientamento per le traiettorie più veloci: (a) profilo triangolare, (b) profilo trapezoidale	134
6.11	Errori di inseguimento di orientamento per le traiettorie più lente: (a) profilo triangolare, (b) profilo trapezoidale	134
6.12	Errori di inseguimento di posizione massimi vs. velocità lineari massime: (a) profilo triangolare, (b) profilo trapezoidale	135
6.13	Traiettoria desiderata nello spazio Cartesiano assegnata all'organo terminale	138

6.14	Traiettoria desiderata nello spazio Cartesiano assegnata all'organo terminale contenente una singolarità	138
6.15	Profilo di velocità trapezoidale assegnato nello spazio Cartesiano	139
6.16	Errori di inseguimento di posizione per la prima traiettoria (f = veloce, s = lenta)	141
6.17	Errori di inseguimento di orientamento per la prima traiettoria (f = veloce, s =lenta)	141
6.18	Errori di inseguimento di posizione per la seconda traiettoria (f = veloce, s = lenta)	142
6.19	Errori di inseguimento di orientamento per la seconda traiettoria (f =veloce, s = lenta)	142
7.1	Diagramma di trasformazione lineare della cinematica differenziale	146
7.2	Geometria di un manipolatore planare con il punto più vicino all'ostacolo in evidenza	157
7.3	Errori di inseguimento di posizione	165
7.4	Distanza del braccio #4 dall'ostacolo	165
7.5	Traiettoria del giunto #1	166
7.6	Traiettoria del giunto #2	166
7.7	Traiettoria del giunto #3	167
7.8	Traiettoria del giunto #4	167
7.9	Profilo di velocità al giunto #1	168
7.10	Profilo di velocità al giunto #2	168
7.11	Profilo di velocità al giunto #3	169
7.12	Profilo di velocità al giunto #4	169

1. INTRODUZIONE

1.1 Il concetto di robotica

Uno dei grandi poteri della ricerca scientifica è quello di fornire all'Uomo dei mezzi per conoscere meglio sé stesso. I fisici, gli psicologi, ad esempio, conducono le loro ricerche per comprendere meglio alcuni aspetti dell'essere umano. Nello studio della robotica, il nesso tra il soggetto di studio, il cosiddetto robot, e l'Uomo è insolitamente stretto. Forse è per tale motivo che tale campo sta affascinando un numero sempre maggiore di ricercatori scientifici.

Tornando alle origini, la parola 'robot' divenne di uso comune dopo che nel 1923 venne rappresentata a Londra un'opera teatrale di Karel Capek intitolata "R.U.R." (I Robot Universali di Rossum). Nell'opera il protagonista Rossum costruisce dei piccoli esseri artificiali antropomorfi che eseguono i suoi ordini; questi esseri hanno il nome di 'robota', che in russo significa lavoratori.

Ai nostri giorni, lo studio della robotica si identifica con il desiderio di riprodurre alcuni aspetti delle funzioni umane per il tramite di meccanismi, sensori, attuatori e calcolatori. Si comprende quindi come tale campo abbracci più di una disciplina scientifica. Ad un livello di astrazione relativamente alto, appare ragionevole suddividere la robotica in quattro settori principali: la manipolazione meccanica, la locomozione, la visione col calcolatore e la sensoristica in generale, e l'intelligenza artificiale.

L'uso di robot nell'industria cominciò a divenire popolare agli inizi degli anni '60. Esso identifica i suoi precursori nelle macchine a controllo numerico e nei sistemi di manipolazione remota. L'ausilio delle tecniche CAD (Computer Aided Design) e CAM (Computer Aided Manufacturing) ha certamente contribuito alla diffusione dell'uso di robot nei

cosiddetti sistemi di produzione flessibili. L'insieme di tali tecnologie sta conducendo l'automazione industriale verso una transizione il cui obiettivo ed il cui impatto con l'economia mondiale allo stato attuale, tuttavia, sono ancora in parte sconosciuti agli esperti del settore.

Dare una definizione ben precisa di cosa si voglia intendere oggi per robot è un compito alquanto arduo; basti ad esempio pensare al concetto di robot che può avere il comune uomo della strada: "Una macchina animata dotata di intelligenza simile all'Uomo". Forse la definizione fornita dal Robot Institute of America sembra quella più calzante ed accettata nel settore scientifico: "Un Robot è un manipolatore meccanico riprogrammabile, multifunzionale, progettato per muovere materiali, pezzi, utensili o comunque componenti specializzati secondo movimenti programmati variabili, per eseguire una certa gamma di compiti preassegnati". Questi compiti sono caratterizzati dall'interazione pressoché permanente tra l'utensile portato dal robot e l'ambiente esterno, il che rende necessaria una certa strategia di esecuzione del compito.

Al di là di una definizione formale, risulta abbastanza chiaro che le caratteristiche che differenziano un robot da una macchina utensile di tipo convenzionale sono:

- a) la versatilità, ovvero la capacità fisica di eseguire compiti diversi o uno stesso compito in maniera diversificata: ciò implica che la struttura geometrica del robot possa variare;
- b) l'adattabilità all'ambiente, ovvero la capacità di reagire alle modifiche impreviste dell'ambiente.

Mentre la prima proprietà è generalmente soddisfatta da tutti i robot, la seconda, invece, è ritrovabile essenzialmente solo a livello sperimentale. Gli ostacoli da superare

sono dovuti principalmente alla mancanza di organi per l'acquisizione di informazioni sull'ambiente, all'imperfezione degli algoritmi di intelligenza artificiale e alla lunghezza dei tempi di calcolo.

Si ritiene utile precisare, tuttavia, che nella presentazione dei risultati dell'attività di ricerca oggetto del presente lavoro, si fa riferimento al componente base del robot, ovvero al manipolatore meccanico. Secondo tale accezione, lo studio della meccanica e del controllo di un manipolatore non rappresenta certo una scienza nuova, ma più propriamente in esso si fondono elementi di analisi e di sintesi provenienti da discipline cosiddette 'classiche'. L'Ingegneria Meccanica fornisce le metodologie per lo studio delle macchine in situazioni statiche e dinamiche. La Matematica supporta gli strumenti necessari alla descrizione dei movimenti nello spazio e degli altri attributi di un manipolatore. La Teoria del Controllo fornisce quegli strumenti atti al progetto e alla valutazione di algoritmi per l'effettuazione di movimenti desiderati o per l'applicazione di forze desiderate. Tecniche dall'Ingegneria Elettrica soccorrono nel progetto di organi sensoriali e di interfaccia per robot industriali, ed è infine compito dell'Informatica provvedere ad un supporto per la programmazione dell'insieme di tali apparecchiature per far eseguire al robot un certo compito desiderato.

1.2 La meccanica ed il controllo di manipolatori

Nel seguito si intendono fornire i punti essenziali nonché quella terminologia di base riguardanti l'analisi e la sintesi dei manipolatori meccanici.

Descrizione della posizione e dell'orientamento

Nello studio della robotica si è costantemente interessati alla posizione degli oggetti nello spazio tridimensionale. Questi oggetti sono i bracci del manipolatore, le parti e gli utensili con i quali esso interagisce, e gli altri oggetti nello spazio di lavoro del manipolatore stesso. In prima approssimazione, tali oggetti possono descriversi a mezzo di due attributi: la loro posizione ed il loro orientamento. Naturalmente, un argomento di interesse immediato è la maniera in cui si rappresentano tali quantità e le si manipolano matematicamente.

Un modo di descrivere la posizione e l'orientamento di un corpo nello spazio è quello di associare un sistema di assi coordinati, una terna, rigidamente all'oggetto. Si può quindi procedere a descrivere la posizione e l'orientamento di tale terna rispetto ad un certo sistema di assi coordinati di riferimento (Fig. 1.1).

Dal momento che ogni terna può fungere da sistema di riferimento rispetto al quale esprimere la posizione e l'orientamento di un corpo, spesso si pensa di 'trasformare' ovvero 'cambiare la descrizione di' tali attributi di un corpo da una terna ad un'altra. Nel Capitolo 2 saranno discusse convenzioni e metodologie per la descrizione della posizione e dell'orientamento, nonché la matematica necessaria alla manipolazione di tali quantità rispetto a diversi sistemi di coordinate.

Cinematica diretta dei manipolatori

La cinematica è quella branca della meccanica che studia il moto di un corpo indipendentemente dalle sue cause. Con la cinematica si studiano la posizione, la velocità, l'accelerazione e tutte le derivate di ordine maggiore delle variabili di posizione (rispetto al tempo o ad ogni altra

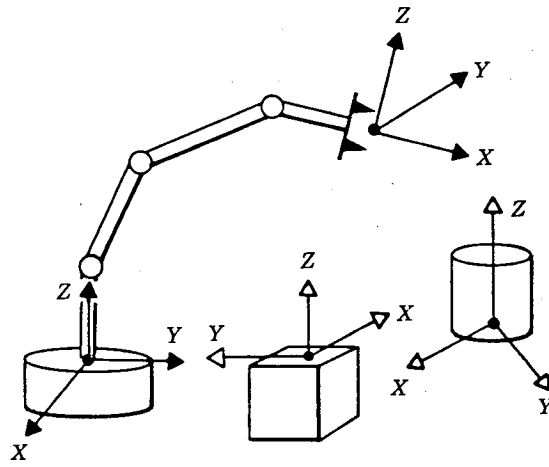


Fig. 1.1

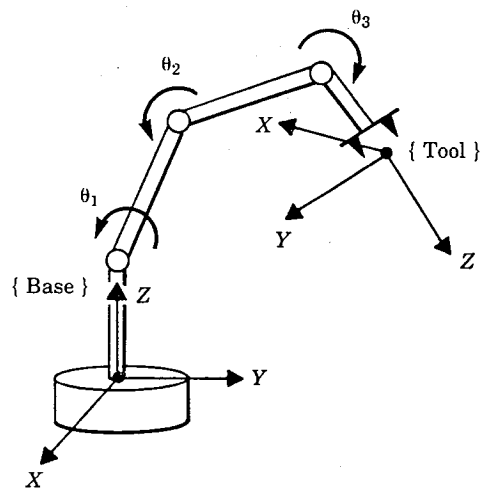


Fig. 1.2

variabile). Pertanto lo studio della cinematica dei manipolatori riguarda tutte le proprietà geometriche e temporali del moto.

I manipolatori consistono di una sequenza di bracci connessi per il tramite di giunti che permettono il moto relativo di bracci adiacenti. Tali giunti sono solitamente forniti di sensori di posizione che consentono di misurare la posizione relativa dei bracci adiacenti. Nel caso di giunti di rotazione si parla di angoli di giunto. Alcuni manipolatori contengono giunti prismatici per i quali il moto relativo dei due bracci è una traslazione di giunto.

Il numero di gradi di libertà che un manipolatore possiede è il numero di variabili di posizione indipendenti necessarie a specificare la posizione e l'orientamento nello spazio di tutte le parti del meccanismo. Tale termine viene generalmente usato per ogni tipo di meccanismo. Ad esempio, un cinematismo a catena chiusa a quattro membri ha un solo grado di libertà, pur essendovi ben tre membri in movimento. Nel caso tipico di un robot industriale, essendo solitamente il manipolatore una catena cinematica aperta ed essendo la posizione di un giunto solitamente definita a mezzo di una singola variabile, il numero dei giunti è pari proprio al numero di gradi di libertà.

All'estremità libera della catena di bracci che formano il manipolatore vi è l'organo terminale. In dipendenza della particolare applicazione del robot, l'organo terminale può essere una pinza, una torcia di saldatura, un elettromagnete, ecc. Generalmente la posizione del manipolatore viene descritta fornendo una descrizione della terna di utensile, associata all'organo terminale, relativa alla terna base solidale alla base fissa del manipolatore (Fig. 1.2).

Un problema fondamentale nello studio della manipolazione meccanica è quello della cinematica diretta. Si tratta del problema geometrico statico di calcolare la posizione e l'orientamento dell'organo terminale del manipolatore. Più

specificamente, assegnato un insieme di angoli di giunto, il problema cinematico diretto consiste nel computare la posizione e l'orientamento della terna utensile relativa alla terna base. E' tipico di tale problema il passaggio dalla rappresentazione della posizione del manipolatore nello spazio dei giunti ad una rappresentazione nello spazio di lavoro (solitamente quello Cartesiano). Tale problema sarà discusso nel Capitolo 3.

Cinematica inversa dei manipolatori

Nel Capitolo 4 si introdurrà il problema della cinematica inversa che è poi l'argomento centrale di questo lavoro e dei capitoli successivi, in cui verrà presentato un nuovo algoritmo di soluzione. Tale problema si pone come segue: "Assegnata la posizione e l'orientamento dell'organo terminale del manipolatore, calcolare tutti i possibili insiemi di angoli di giunto che determinano la posizione e l'orientamento assegnati" (Fig. 1.3). Tale problema è di cruciale importanza per l'utilizzo pratico dei manipolatori.

Il problema cinematico inverso non risulta così semplice come quello cinematico diretto. La ragione è che, essendo le equazioni cinematiche nonlineari, la loro soluzione non è sempre facile se non addirittura impossibile da ottenere in forma chiusa. In aggiunta sorgono i problemi sull'esistenza di una soluzione e sulla possibilità di avere soluzioni multiple.

L'esistenza o la non esistenza di una soluzione cinematica definisce lo spazio di lavoro del manipolatore assegnato. La mancanza di una soluzione sta a significare che il manipolatore non può assumere la posizione e l'orientamento desiderati poiché questi sono al di fuori del suo spazio di lavoro.

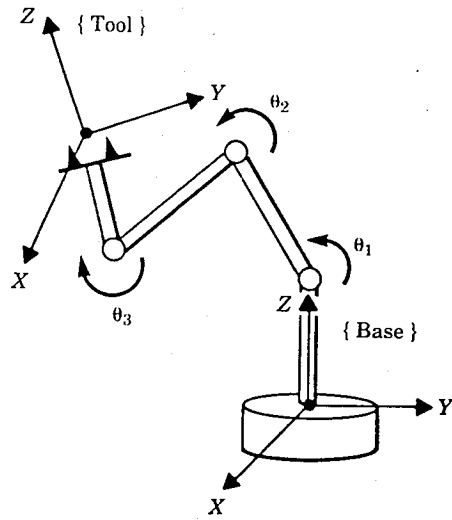


Fig. 1.3

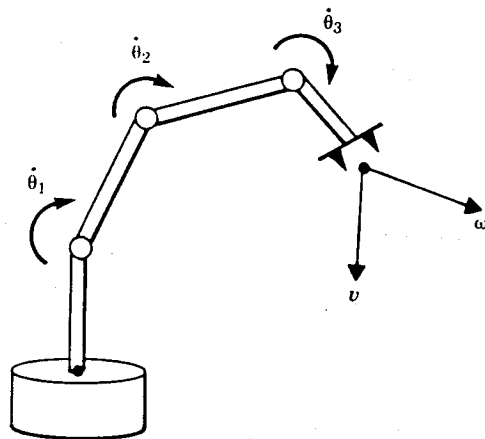


Fig. 1.4

Velocità, forze statiche, singolarità

Oltre a trattare problemi di posizionamento statico, si può essere interessati ad analizzare i manipolatori in movimento. Di frequente, nell'eseguire l'analisi delle velocità di un meccanismo, risulta conveniente definire una quantità matriciale chiamata lo Jacobiano del manipolatore. Lo Jacobiano specifica una trasformazione delle velocità nello spazio dei giunti nelle velocità nello spazio Cartesiano (Fig. 1.4). La natura di tale trasformazione cambia al variare della configurazione del manipolatore. In certi punti, chiamati singolarità, tale trasformazione non risulta invertibile. La comprensione di tale fenomeno è di importanza fondamentale sia per il progettista che per l'utente di un manipolatore.

I manipolatori non operano ovviamente solo nello spazio libero, bensì si richiede loro di venire a contatto con una superficie di lavoro, e di applicare una forza statica. In tal caso sorge il problema: "Assegnata una forza ed un momento di contatto desiderati, quale è l'insieme di coppie ai giunti necessario per generarle?" Ancora una volta, la matrice Jacobiana del manipolatore viene fuori abbastanza naturalmente nella soluzione di tale problema.

Dinamica

La dinamica è quella vasta branca della meccanica rivolta allo studio delle forze che causano un moto. Allo scopo di far accelerare un manipolatore dalla sua posizione di riposo, quindi di farlo viaggiare secondo una velocità costante del suo organo terminale, e infine di farlo decelerare fino ad arrestarsi, un insieme complesso di funzioni di coppia deve essere applicato agli attuatori ai giunti (comprendendo in tale termine quelle apparecchiature che azionano un manipolatore, quali ad es. motori elettrici, attuatori

idraulici e pneumatici, muscoli, ecc.). La forma esatta di tali funzioni dipende dagli attributi spaziali e temporali della traiettoria seguita dall'organo terminale, nonché dalle caratteristiche inerziali dei bracci e del carico, dall'attrito ai giunti, ecc. Una maniera di controllare un manipolatore affinché esso inseguia una traiettoria desiderata comporta il calcolo di tali funzioni di coppia, usando le equazioni dinamiche del moto del manipolatore.

Un uso secondario delle equazioni dinamiche avviene in simulazione. Riformulando le equazioni dinamiche in modo da esprimere le accelerazioni come funzioni delle coppie di attuazione, risulta possibile simulare il moto del manipolatore sotto l'azione di tali coppie (Fig. 1.5).

Generazione di una traiettoria

Una possibilità comune di far muovere un manipolatore da un punto ad un altro in maniera 'dolce', controllata è quella di far muovere ogni giunto secondo una funzione 'dolce' nel tempo. Solitamente, l'avvio e l'arresto di ogni giunto sono coordinati, in modo da far apparire coordinato il moto del manipolatore stesso. La maniera esatta di come calcolare tali funzioni di moto è il problema di generazione di una traiettoria (Fig. 1.6).

Di frequente un percorso viene descritto non solo in termini della sua posizione iniziale e di quella finale, ma anche attraverso una sequenza di posizioni intermedie, per le quali il manipolatore deve transitare. In tal caso si parla di "spline" per intendere una funzione 'dolce' che passi attraverso tali posizioni intermedie.

Allo scopo di far seguire all'organo terminale una traiettoria rettilinea (o comunque di altra forma assegnata) nello spazio, bisogna convertire la funzione di moto desiderato in un insieme equivalente di funzioni di moto ai giunti. Tale problema si collega naturalmente con la soluzione

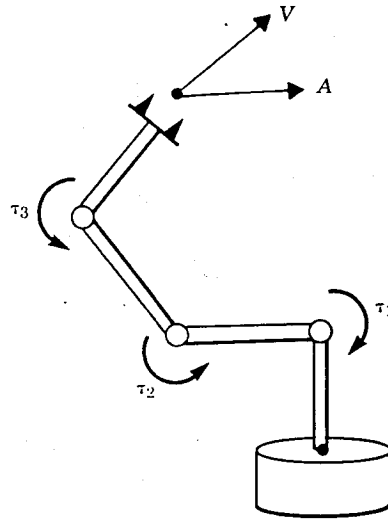


Fig. 1.5

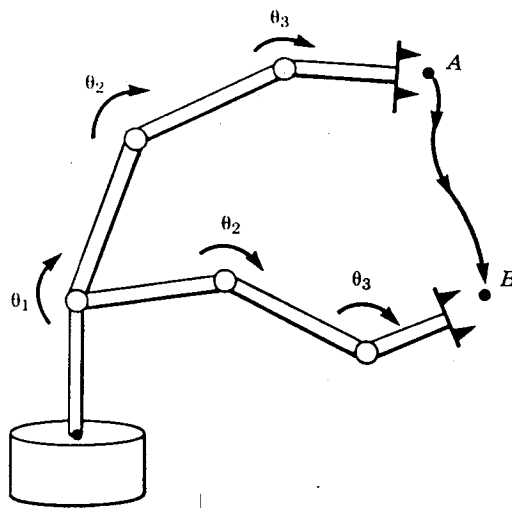


Fig. 1.6

del problema cinematico inverso lungo la traiettoria.

Controllo di posizione

Alcuni manipolatori sono equipaggiati con motori a passo, o con altri attuatori in grado di far eseguire direttamente una traiettoria desiderata. La grande maggioranza di manipolatori, tuttavia, sono azionati per il tramite di attuatori che supportano una forza o una coppia che causa il movimento dei bracci. Se tale è il caso, si necessita di un algoritmo che valuti le coppie che produrranno il moto desiderato. Il problema della dinamica è fondamentale per la sintesi di tali algoritmi, ma non costituisce da solo una soluzione. Un requisito primario di un sistema di controllo di posizione è quello di compensare automaticamente gli errori nella conoscenza dei parametri del sistema, nonché sopprimere i disturbi che perturbano il sistema, facendolo deviare dalla traiettoria desiderata. Per realizzare tutto ciò, le informazioni provenienti dai sensori di posizione e velocità vengono gestite dall'algoritmo di controllo che calcola i comandi in coppia agli attuatori (Fig. 1.7).

Controllo in forza

L'abilità di un manipolatore di controllare le forze di contatto allorché esso viene a contatto con parti, utensili o superfici di lavoro sembra essere di grande importanza nell'impiego di manipolatori in molti compiti del mondo reale. Il controllo in forza risulta quindi complementare al controllo di posizione nel senso che si può pensare di applicare l'uno o l'altro a seconda delle situazioni. Quando un manipolatore si muove nello spazio libero, ovviamente, ha senso parlare solo di controllo di posizione, dal momento che non vi è alcuna superficie di 'reazione'. Ma allorché un manipolatore è a contatto con una superficie rigida, schemi

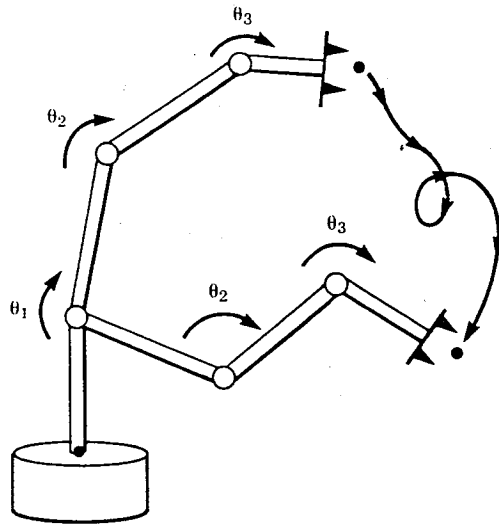


Fig. 1.7

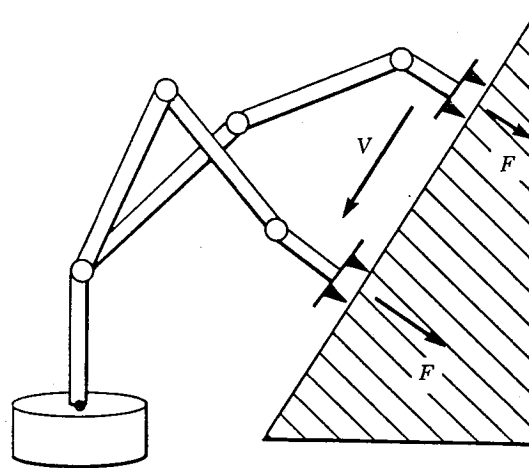


Fig. 1.8

di controllo di posizione possono comportare delle forze di contatto eccessive oppure possono far perdere il contatto stesso con la superficie, laddove quest'ultimo era desiderato per la particolare applicazione in corso. Dal momento che i manipolatori sono raramente vincolati dalle superfici di reazione simultaneamente in tutte le direzioni, viene spontaneo ricorrere ad uno schema di controllo ibrido, con alcune direzioni controllate con una legge di controllo di posizione e le rimanenti direzioni controllate con una legge di controllo in forza (Fig. 1.8).

La programmazione dei robot

Un linguaggio di programmazione per robot serve quale interfaccia tra l'utente ed il robot industriale. Sorgono spontanee domande come: "Come descrivere in maniera semplice il moto nello spazio?" "Come programmare più manipolatori in modo che essi possano lavorare in parallelo?" "Come descrivere le azioni basate sui sensori in un linguaggio?"

I manipolatori robotizzati si differenziano dalla cosiddetta automazione rigida poiché sono flessibili nel senso che sono programmabili. Non solo i movimenti dei manipolatori sono programmabili, ma attraverso l'uso di sensori e di altri supporti di comunicazione con gli altri organi del sistema di automazione, essi possono 'adattarsi' alle variazioni nel corso del compito (Fig. 1.9).

La sofisticazione dell'interfaccia d'utente sta diventando estremamente importante con l'impiego di manipolatori e di altra automazione programmabile in applicazioni industriali sempre più esigenti. Il problema della programmazione di un manipolatore sta così scavalcando il problema della programmazione 'tradizionale', diventando un argomento di ricerca a sé stante.

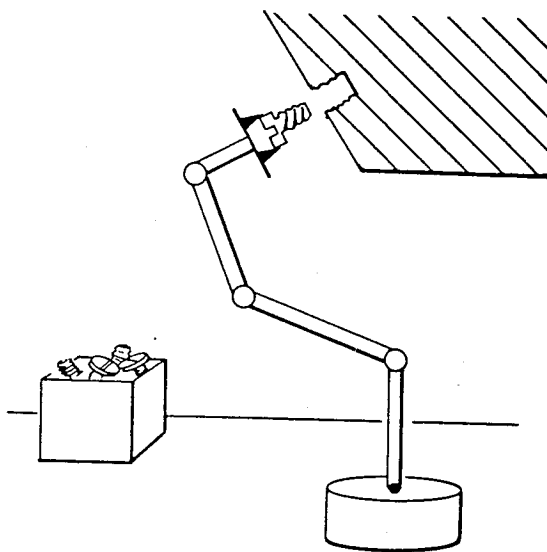


Fig. 1.9

1.3 Nomenclatura

La nomenclatura ha da sempre rappresentato un problema nella scienza e nell'ingegneria. Pertanto si ritiene utile anteporre le seguenti convenzioni che verranno seguite nel corso della trattazione:

Di solito le variabili minuscole indicheranno scalari, le variabili sottolineate vettori e le variabili maiuscole matrici.

Si adopereranno apici e pedici per caratterizzare le terne di coordinate rispetto alle quali una certa quantità è scritta.

Si farà uso inoltre di molte funzioni trigonometriche. Pertanto si indicherà $\cos \theta_i$ semplicemente come c_i , e $\sin \theta_i$ come s_i . Analogamente c_{ij} denoterà $\cos(\theta_i + \theta_j)$ ecc.

I vettori sono sempre riguardati come vettori colonna; pertanto si utilizzerà il trasposto per i vettori riga. Il prodotto interno di due vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sarà scritto sempre come $\underline{a}^T \underline{b}$, mentre il prodotto vettoriale come $\underline{a} \times \underline{b}$.

Altre convenzioni saranno stabilite localmente nel corso della trattazione.

Testi di carattere generale sulla robotica

- [1] R.P. Paul, Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control, MIT Press, 1982.
- [2] M.T. Brady et al., Robot Motion, MIT Press, 1983.
- [3] G. Beni, and S. Hackwood, editors, Recent Advances in Robotics, Wiley, 1985.
- [4] R. Dorf, Robotics and Automated Manufacturing, Reston, 1983.
- [5] A. Critchlow, Introduction to Robotics, Macmillan, 1985.
- [6] W. Snyder, Industrial Robots: Computer Interfacing and Control, Prentice Hall, 1985.
- [7] Y. Koren, Robotics for Engineers, McGraw Hill, 1985.
- [8] V. Hunt, Industrial Robotics Handbook, Industrial Press Inc., 1983.
- [9] J. Engelberger, Robots in Practice, AMACOM, 1980.
- [10] J.J. Craig, Introduction to Robotics: Mechanics & Control, Addison-Wesley, 1986.
- [11] H. Asada and J.-J.E. Slotine, Robot Analysis and Control, Wiley, 1986.
- [12] M. Vukobratovic et al., Scientific Fundamentals of Robotics, 1-6, Springer-Verlag, 1982-1986.

2. DESCRIZIONE DELLO SPAZIO E TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

2.1 Posizione ed orientamento di un corpo rigido

La catena cinematica di un manipolatore può essere modellata come un sistema di corpi rigidi. Ogni corpo è completamente descritto nello spazio a mezzo della sua posizione e del suo orientamento.

La posizione può essere rappresentata dalle coordinate di un punto arbitrario fisso rispetto al corpo rigido. Sia O-xyz una terna di assi coordinati fissa a terra e sia O' un punto arbitrario fisso al corpo rigido, come mostrato in Fig. 2.1. Pertanto la posizione del corpo rigido rispetto alla terna di coordinate O-xyz risulta

$$\underline{p}_{O'} = \begin{bmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Per rappresentare l'orientamento del corpo rigido, si può pensare di associare tre assi coordinati x_b, y_b, z_b al corpo rigido come mostrato in Fig. 2.1. Tali assi formano un'altra terna di coordinate $O'-x_b y_b z_b$ che si muove col corpo rigido. L'orientamento del corpo rigido quindi può rappresentarsi a mezzo delle direzioni di tali assi. Siano $\underline{n}, \underline{s}, \underline{a}$ i versori rispettivamente lungo le tre direzioni x_b, y_b, z_b . Le componenti di ogni versore risultano i coseni direttori di ogni asse proiettati sulla terna di coordinate fissa O-xyz. Per convenienza, i tre versori possono essere combinati in un'unica matrice R:

$$R = \begin{bmatrix} \underline{n} & \underline{s} & \underline{a} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La matrice R pertanto descrive in maniera completa

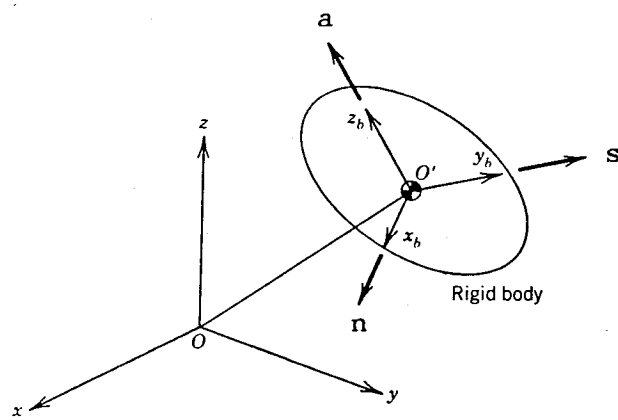


Fig. 2.1

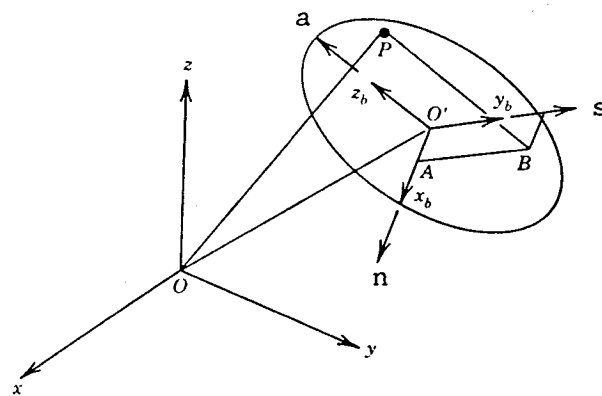


Fig. 2.2

l'orientamento del corpo rigido rispetto alla terna di coordinate O-xyz. Si noti anche che i vettori colonna di R sono ortonormali, ovvero risulta

$$\underline{n}^T \underline{s} = 0 \quad \underline{s}^T \underline{a} = 0 \quad \underline{a}^T \underline{n} = 0 \quad (2.3)$$

e inoltre

$$\|\underline{n}\| = 1 \quad \|\underline{s}\| = 1 \quad \|\underline{a}\| = 1 \quad (2.4)$$

dove $\|\underline{v}\|$ indica la norma Euclidea di un vettore $\underline{v}$. La matrice R si dirà pertanto matrice ortonormale.

2.2 Trasformazioni di coordinate

Sia P un punto arbitrario nello spazio, come in Fig. 2.2. Le coordinate del punto P rispetto alla terna di coordinate fissa O-xyz siano

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La posizione del punto P, tuttavia, può essere rappresentata anche rispetto alla terna di coordinate associata al corpo rigido O'-x_by_bz_b, ovvero

$$\underline{p}^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

L'apice ^b sta ad indicare che il vettore è definito rispetto alla terna di coordinate sul corpo. Si vuole ora trovare la relazione esistente tra i due sistemi di coordinate. Tale

relazione va a definire la trasformazione di coordinate tra la terna rigida e la terna corpo. In precedenza si è visto che la posizione e l'orientamento del corpo rigido rispetto alla terna fissa era descritta dal vettore $\underline{p}_0$ e dalla matrice R . Come mostrato in Fig. 2.2, il punto P può raggiungersi attraverso i punti O' , A e B . In termini matematici ciò equivale a scrivere

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'A} + \vec{AB} + \vec{BP} \quad (2.7)$$

dove $\vec{OP} = \underline{p}$ e $\vec{OO'} = \underline{p}_0$. Si noti però che i vettori $\vec{O'A}$, $\vec{AB}$ e $\vec{BP}$ risultano paralleli ai versori $\underline{n}$, $\underline{s}$ e $\underline{a}$, rispettivamente, e che le loro lunghezze sono proprio date da u , v e w . Pertanto la (2.7) può essere riscritta come

$$\underline{p} = \underline{p}_0 + u\underline{n} + v\underline{s} + w\underline{a} \quad (2.8)$$

e, tenendo conto delle (2.2) e (2.6), ancora come

$$\underline{p} = \underline{p}_0 + R\underline{p}^b \quad (2.9)$$

La (2.9) fornisce la trasformazione di coordinate richiesta dalle coordinate rispetto al corpo $\underline{p}^b$ alle coordinate fisse $\underline{p}$. Si noti che tale trasformazione di coordinate viene scritta in termini di $\underline{p}_0$ ed R , ovvero in termini della posizione e dell'orientamento del corpo rispetto alla terna fissa.

Si moltiplichino ora ambo i membri della (2.9) per la trasposta della matrice R , R^T , ovvero

$$R^T \underline{p} = R^T \underline{p}_0 + R^T R \underline{p}^b \quad (2.10)$$

Dalle (2.3) e (2.4) il prodotto matriciale $R^T R$ a secondo membro risulta

$$R^T R = \begin{bmatrix} \underline{n}^T \underline{n} & \underline{n}^T \underline{s} & \underline{n}^T \underline{a} \\ \underline{s}^T \underline{n} & \underline{s}^T \underline{s} & \underline{s}^T \underline{a} \\ \underline{a}^T \underline{n} & \underline{a}^T \underline{s} & \underline{a}^T \underline{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Pertanto la (2.10) si riduce a

$$\underline{p}^b = -R^T \underline{p}_0 + R^T \underline{p} \quad (2.12)$$

La (2.12) rappresenta la trasformazione di coordinate dalle coordinate fisse alle coordinate rispetto al corpo, ovvero la trasformazione inversa della (2.9). Come si vede la trasformazione inversa viene semplicemente ottenuta usando la trasposta della matrice R . Infine si noti dalla (2.11) che l'inversa di una matrice ortonormale risulta semplicemente pari alla sua trasposta, ovvero

$$R^{-1} = R^T \quad (2.13)$$

In conclusione si può affermare che la matrice di rotazione R può assumere tre diversi significati fisici. Essa può infatti rappresentare:

- a) l'orientamento della terna di coordinate $O'-x_b y_b z_b$ rispetto alla terna $O-xyz$, dove ognuno dei vettori colonna rappresenta il coseno direttore del corrispondente asse della terna $O'-x_b y_b z_b$ proiettato sulla terna $O-xyz$,
- b) la trasformazione di coordinate dalla terna $O'-x_b y_b z_b$ alla terna $O-xyz$,
- c) la rotazione di un vettore nella terna $O-xyz$.

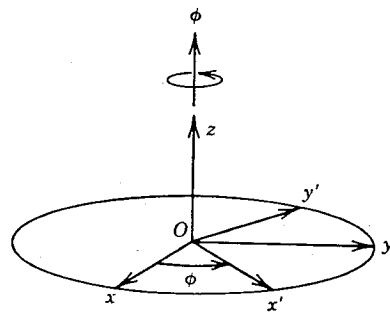
Le tre proposizioni di cui sopra sono equivalenti nel senso che, partendo da una qualunque delle tre, si possono derivare le altre due.

2.3 Angoli di Eulero

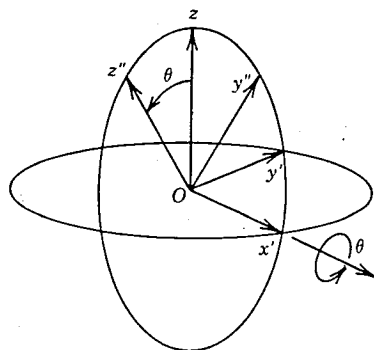
Nei precedenti paragrafi si è fatto uso della matrice R per rappresentare l'orientamento di un corpo rigido o di una terna di coordinate associata al corpo. Gli elementi di tale matrice, tuttavia, non sono fra di loro indipendenti. Infatti la matrice R è formata da nove elementi i quali sono soggetti alle condizioni di ortogonalità (2.3) e di norma unitaria (2.4). Essendo tali vincoli in numero di sei, solo tre dei nove elementi risultano indipendenti. In altri termini, la rappresentazione matriciale di cui sopra è ridondante. In tale paragrafo, pertanto, si identificherà una rappresentazione dell'orientamento di un corpo rigido che faccia uso di sole tre variabili indipendenti.

Si considerino le tre rotazioni della terna $O-xyz$ mostrate in Fig. 2.3. Inizialmente la terna di coordinate ruoti intorno all'asse z di un angolo ϕ (Fig. 2.3a). Quindi la nuova terna di coordinate $O-x'y'z'$ ruoti intorno all'asse x' di un angolo θ (Fig. 2.3b). Infine la terna corrente $O-x'y'z'$ ruoti intorno all'asse z' di un angolo ψ . La terna di coordinate risultante $O-x''y''z''$ è illustrata in Fig. 2.3c. I tre angoli, ϕ , θ e ψ , determinano in maniera univoca l'orientamento della terna di coordinate risultante, e si indicano come angoli di Eulero. Essi sono indipendenti, nel senso che ognuno di essi può variare in maniera arbitraria.

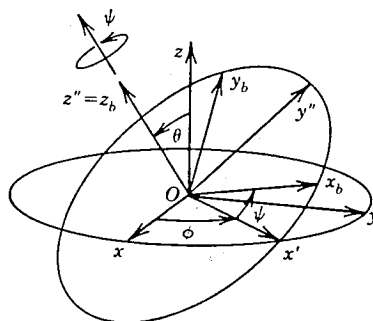
Una volta assegnato un orientamento arbitrario della terna di coordinate $O-x''y''z''$, gli angoli di Eulero possono essere determinati come segue. Sia Ox'' in Fig. 2.3c la retta di intersezione tra il piano $x''y''$ ed il piano $x-y$. Tale intersezione prende il nome di linea di nodi. L'angolo ψ viene definito come l'angolo formato dalla linea dei nodi con l'asse x'' in Fig. 2.3c, mentre l'angolo ϕ è l'angolo formato dall'asse x con la linea dei nodi. L'angolo θ , infine, risulta l'angolo formato dall'asse z con l'asse $z'' = z''$. Tutti gli angoli si intendono misurati in senso antiorario.



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.3

Ne consegue che i tre angoli possono essere definiti per un'orientamento arbitrario della terna di coordinate $O-x_b y_b z_b$ rispetto alla terna fissa $O-xyz$. Si noti, tuttavia, che gli angoli di Eulero non sono univoci; è immediato riconoscere che gli angoli $(\phi + \pi, -\theta, \psi + \pi)$ forniscono lo stesso orientamento degli angoli (ϕ, θ, ψ) .

Gli angoli di Eulero costituiscono un insieme di variabili indipendenti che determinano l'orientamento di una terna di coordinate. Si vuole quindi determinare la matrice di rotazione R rappresentante le tre rotazioni consecutive associate agli angoli di Eulero. Si consideri la trasformazione di coordinate relativa alla rotazione ϕ . Le coordinate $\underline{p}' = (x' \ y' \ z')^T$ sono trasformate nelle coordinate $\underline{p} = (x \ y \ z)^T$ dalla matrice di rotazione $R_z(\phi)$ che è definita come

$$\underline{p} = R_z(\phi) \underline{p}'$$

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

In maniera analoga, la trasformazione di coordinate di $\underline{p}'' = (x'' \ y'' \ z'')^T$ in $\underline{p}'$ relativa alla rotazione θ è data da

$$\underline{p}' = R_{x'}(\theta) \underline{p}''$$

dove

$$R_{x'}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Infine per la rotazione ψ si ha

$$\underline{p}'' = R_{z''}(\psi) \underline{p}^b$$

$$R_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Combinando le tre trasformazioni di coordinate, si ottiene

$$\underline{p} = R_z(\phi) R_{x'}(\theta) R_{z''}(\psi) \underline{p}^b \quad (2.17)$$

La matrice prodotto a secondo membro può essere sinteticamente indicata come

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_z(\phi) R_{x'}(\theta) R_{z''}(\psi) \quad (2.18)$$

che rappresenta la trasformazione di coordinate da $\underline{p}^b$ a $\underline{p}$. A fronte dell'equivalenza tra la matrice di trasformazione e la matrice di rotazione, come evidenziato nel § 2.2, la matrice $R(\phi, \theta, \psi)$ rappresenta anche la rotazione della terna di coordinate O-xyz nella terna di coordinate O- $x_b y_b z_b$. Per di più, i vettori colonna di $R(\phi, \theta, \psi)$ risultano i coseni direttori degli assi coordinati x_b , y_b e z_b rispetto alla terna O-xyz.

Si ritiene utile infine menzionare che anche un altro insieme di angoli (rollio, beccheggio, scorrimento) viene diffusamente adoperato in robotica per descrivere l'orientamento di un corpo rigido. L'angolo di rollio θ_z rappresenta una rotazione intorno all'asse z, mentre gli angoli di beccheggio e di scorrimento sono rappresentativi di rotazioni consecutive intorno ai corrispettivi assi y e x. Secondo l'uso della notazione di Fig. 2.3, la matrice di rotazione associata a tali angoli risulta $R_z(\theta_z) R_y(\theta_y) R_x(\theta_x)$.

2.4 Trasformazioni omogenee

In tale paragrafo si vuole sviluppare un metodo utile di rappresentazione in forma compatta per le trasformazioni di coordinate.

Si riprenda la trasformazione di coordinate data dall'eq. (2.9)

$$\underline{p} = \underline{p}_0 + R\underline{p}^b \quad (2.9)$$

Il primo termine a secondo membro rappresenta il contributo alla trasformazione relativo alla traslazione, laddove il secondo termine quello relativo alla rotazione. L'obiettivo è ricavare una rappresentazione semplice della trasformazione di coordinate nella quale le trasformazioni dovute alla traslazione ed alla rotazione siano compattate in un'unica matrice [1]. A tal fine si definiscano i vettori (4 x 1)

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{p}^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

e la matrice (4 x 4)

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} & R & \underline{p}_0 \\ & & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.20)$$

In pratica si è aumentata la dimensione dei vettori originali $\underline{p}$ e $\underline{p}^b$ aggiungendo un "1" come quarto elemento. In maniera del tutto simile, la matrice di rotazione R è stata estesa combinandola con il vettore $\underline{p}_0$, unitamente a tre "0" ed un "1" in quarta riga. Pertanto, la (2.9) può scriversi come

$$\underline{p} = A \underline{p}^b \quad (2.21)$$

Si noti che la matrice A è rappresentativa sia della posizione che dell'orientamento della terna $O-x_b y_b z_b$, avendo ridotto i due termini a secondo membro della (2.9) nell'unico termine della (2.21). La trasformazione di coordinate data dalla (2.21) prende il nome di trasformazione omogenea.

La compattezza di notazione della trasformazione omogenea risulta particolarmente vantaggiosa allorché si vogliano rappresentare trasformazioni consecutive. Sia infatti $O''-x_c y_c z_c$ un'altra terna di coordinate, come illustrato in Fig. 2.4, e sia $\underline{p}^c$ il vettore delle coordinate del punto P espresse nella terna $O''-x_c y_c z_c$. Si ha

$$\underline{p}^b = \underline{p}_0' + R' \underline{p}^c \quad (2.22)$$

dove $\underline{p}_0'$ ed R' sono rispettivamente il vettore e la matrice associati con la trasformazione di coordinate da $\underline{p}^c$ a $\underline{p}^b$. Sostituendo la (2.22) nella (2.9), si ottiene

$$\underline{p} = \underline{p}_0 + R \underline{p}_0' + R R' \underline{p}^c \quad (2.23)$$

Come si nota dalla (2.23), si hanno tre termini a secondo membro. Si intuisce che, all'aumentare del numero di trasformazioni, aumenta il numero di termini a secondo membro della (2.23). In generale si può affermare che n trasformazioni consecutive conducono ad un polinomio di ordine n consistente di $(n+1)$ termini non omogenei. Se invece si adopera la trasformazione omogenea basata sulla matrice (4×4) , si ottiene una forma compatta con un sol termine rappresentativo di tutte le trasformazioni consecutive. Si considerino infatti n trasformazioni consecutive dalla terna n scalando alla terna 0 . Sia A_i^{i-1} la matrice (4×4) associata alla trasformazione omogenea dalla terna i alla terna $i-1$; il vettore posizione $\underline{p}^n$ nella terna n viene trasformato nel

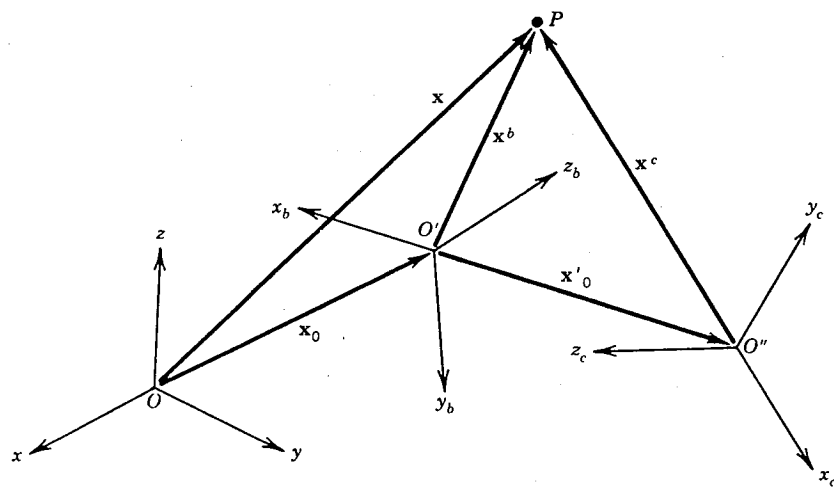


Fig. 2.4

vettore $\underline{p}^0$ nella terna 0 secondo il seguente prodotto di trasformazioni:

$$\underline{p}^0 = A_1^0 A_2^1 \dots A_n^{n-1} \underline{p}^n \quad (2.24)$$

Pertanto si sono rappresentate le trasformazioni consecutive a mezzo di un unico termine.

Le matrici (4 x 4) sopra introdotte godono di due altre proprietà del tutto equivalenti a quelle descritte nel § 2.2 per le matrici di rotazione. Una matrice (4 x 4) rappresenta la posizione e l'orientamento di una terna di coordinate. Essa rappresenta anche la traslazione e la rotazione della terna. Pertanto la proprietà di equivalenza per le matrici di rotazione vale anche per le matrici (4 x 4), nelle quali sono raggruppate sia traslazioni che rotazioni.

Si osservi infine che, combinando la (2.12) con la (2.9) e tenendo conto della (2.20), si ottiene che l'inversa della matrice di trasformazione omogenea risulta

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} & R^T & | & -R^T \underline{p}_0 \\ & & | & \\ \hline & 0 & | & 1 \end{array} \right] \quad (2.25)$$

da cui si ottiene anche che $A^{-1}A$ e $AA^{-1} = I$, dove I è la matrice identità.

Bibliografia

- [1] R. Paul, Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control, MIT Press, 1982.

3. MODELLO CINEMATICO DI UN MANIPOLATORE

3.1 Catena cinematica aperta

Gli strumenti matematici sviluppati nel precedente capitolo verranno ora adoperati per ricavare il modello cinematico di un manipolatore. In particolare, si farà uso delle trasformazioni omogenee per descrivere la posizione e l'orientamento di ogni braccio facente parte del manipolatore.

Fondamentalmente un manipolatore è costituito da una serie di corpi rigidi formanti una struttura cinematica. La Fig. 3.1 illustra un manipolatore modellato per l'appunto come un meccanismo seriale di corpi rigidi. Tale meccanismo prende il nome di catena cinematica aperta. La maggior parte dei robot industriali esistenti e dei bracci da laboratorio sono o equivalgono a delle catene cinematiche aperte, e tali sono assunti essere i manipolatori descritti nel corso di tale lavoro.

Ogni braccio membro della catena può essere numerato progressivamente da 0 ad n , come in Fig. 3.1. Il membro alla base, solitamente fisso a terra, viene convenientemente indicato con il numero 0. Il braccio all'estremità, d'altro canto, è quello numero n . Dal momento che un manipolatore esegue un compito per il tramite di un organo terminale applicato all'ultimo braccio, l'interesse primario è quello di analizzare il moto dell'ultimo braccio.

Allo scopo di rappresentare la posizione e l'orientamento dell'organo terminale, si può pensare di associare una terna di coordinate $O_n-x_n y_n z_n$ all'ultimo braccio. La posizione e l'orientamento di tale terna vengono descritti relativamente ad un'altra terna $O_0-x_0 y_0 z_0$ fissa a terra (la base), come mostrato in figura. Il moto dell'organo terminale è dovuto al moto dei bracci intermedi tra la base e l'ultimo braccio. Bisogna pertanto caratterizzare la posizione e

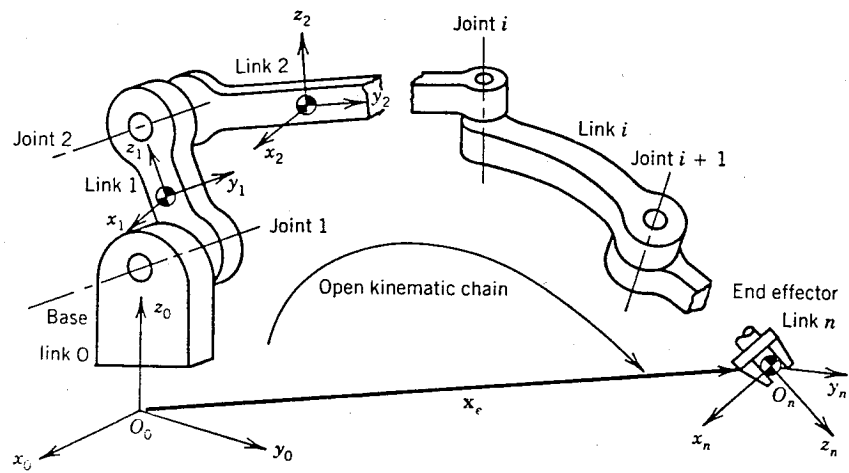


Fig. 3.1

l'orientamento di ogni braccio membro della serie allo scopo di determinare la posizione e l'orientamento dell'organo terminale. Si associ quindi una terna di coordinate ad ognuno dei bracci, ovvero $O_i-x_iy_iz_i$ relativa al braccio i . La posizione e l'orientamento della terna $O_i-x_iy_iz_i$ rispetto alla terna precedente $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ possono venir descritti usando la matrice (4×4) di trasformazione omogenea tra tali terne. Si intuisce perciò che la posizione e l'orientamento dell'organo terminale vengono ottenuti a mezzo di trasformazioni omogenee consecutive dall'ultima terna scalando verso la terna di base. Essendo il manipolatore in questione una catena cinematica aperta, le trasformazioni possono essere semplicemente applicate serialmente per trovare la posizione e l'orientamento dell'organo terminale rispetto alla terna base.

Il moto relativo di bracci adiacenti è provocato dal moto del giunto che li connette. Pertanto in un manipolatore con $(n+1)$ bracci vi saranno n giunti, come illustrato in Fig. 3.1. Secondo la convenzione il giunto tra il braccio $i-1$ ed il braccio i sarà il giunto i . Ogni giunto è azionato da un singolo attuatore, che ne comporta il movimento. Di conseguenza, la posizione e l'orientamento dell'organo terminale è determinata dalla posizione delle n variabili di giunto. L'obiettivo del prossimo paragrafo è quello di stabilire le relazioni funzionali tra la posizione e l'orientamento dell'organo terminale e le variabili di giunto.

3.2 Parametri cinematici caratteristici

In tale paragrafo si caratterizzerà l'insieme delle relazioni cinematiche tra due bracci adiacenti facenti parte di una catena cinematica aperta. Si introdurrà la notazione di Denavit-Hartenberg 1 in qualità di metodo sistematico per descrivere tali relazioni cinematiche. Il metodo è

sostanzialmente basato sulla rappresentazione della posizione e dell'orientamento di un corpo rigido con la matrice (4×4), ed il numero di parametri necessari ad una descrizione cinematica completa risulterà minimo.

La Fig. 3.2 illustra una coppia di bracci adiacenti, il braccio $i-1$ ed il braccio i , ed i giunti loro associati, il giunto i ed il giunto $i+1$. La relazione tra i due bracci è descritta dalla posizione e dall'orientamento relativi tra le due terne associate ai due bracci. Nella notazione di Denavit-Hartenberg, l'origine della terna i -esima O_i è situata all'intersezione dell'asse del giunto $i+1$ con la normale comune agli assi dei giunti i ed $i+1$, come evidenziato in figura. Si noti che la terna associata al braccio i è quella in corrispondenza del giunto $i+1$, piuttosto che quella del giunto i . L'asse x_i è diretta lungo il prolungamento della normale comune, laddove l'asse z_i corre lungo l'asse del giunto $i+1$. Infine l'asse y_i viene scelta in maniera tale che la terna risultante $O_i-x_iy_iz_i$ formi una terna di assi coordinati levogira. La posizione e l'orientamento relativi delle due terne consecutive possono essere completamente specificati con i seguenti quattro parametri:

a_i la lunghezza della normale comune

d_i la distanza tra l'origine O_{i-1} ed il punto H_i

α_i l'angolo tra l'asse del giunto i e l'asse z_i misurato in senso antiorario

θ_i l'angolo tra l'asse x_{i-1} e la normale comune H_iO_i misurato attorno all'asse z_{i-1} in senso antiorario.

I parametri a_i ed α_i sono costanti che vengono determinati unicamente dalla geometria del braccio: a_i rappresenta la lunghezza del braccio ed α_i l'angolo di rotazione tra i due

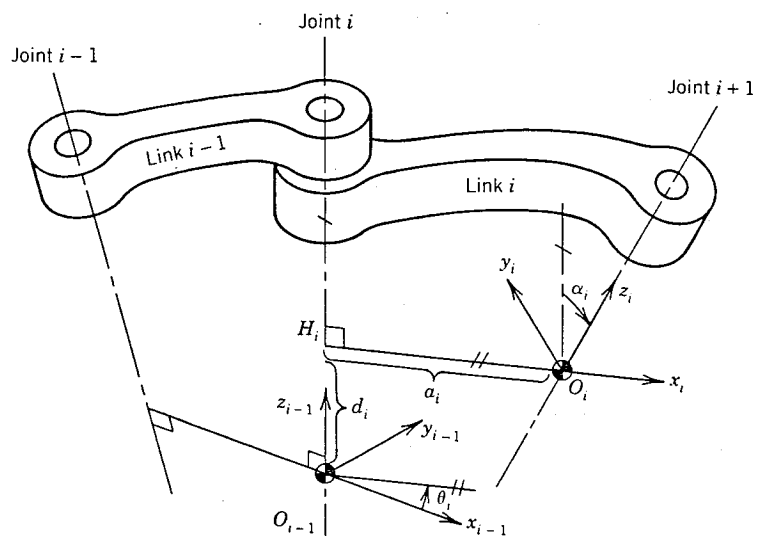


Fig. 3.2

assi dei giunti. Uno degli altri due parametri d_i e θ_i varia al muoversi del giunto.

In un manipolatore si possono avere due tipi di meccanismi di giunto: il giunto di rotazione nel quale i bracci adiacenti ruotano l'uno rispetto all'altro intorno all'asse del giunto, ed il giunto prismatico nel quale invece i bracci traslano linearmente l'uno rispetto all'altro lungo l'asse del giunto. Per un giunto di rotazione θ_i è il parametro che varia e che quindi viene assunto come variabile di giunto, mentre d_i è costante. Per un giunto prismatico è d_i la variabile di giunto, mentre θ_i è ovviamente costante.

A tal punto si possono caratterizzare le relazioni cinematiche tra i bracci adiacenti, facendo uso delle matrici di trasformazione omogenee. A fronte della proprietà di equivalenza discussa nel § 2.1, la matrice rappresentativa della posizione e dell'orientamento della terna i relativamente alla terna $i-1$ può determinarsi considerando la trasformazione di coordinate relativa. La Fig. 3.3 mostra le due terne di coordinate, $O_i-x_i y_i z_i$ ed $O_{i-1}-x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$, e la terna di coordinate intermedia, $H_i-x' y' z'$, associata al punto H_i . Siano $\underline{p}^i$, $\underline{p}'$ e $\underline{p}^{i-1}$ i vettori posizione estesi (4 x 1) rispettivamente nelle terne $O_i-x_i y_i z_i$, $H_i-x' y' z'$ ed $O_{i-1}-x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$. Dalla figura emerge che la trasformazione di coordinate da $\underline{p}^i$ a $\underline{p}'$ è data da

$$\underline{p}' = A_i^{int} \underline{p}^i \quad (3.1)$$

dove

$$A_i^{int} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

In maniera analoga la trasformazione da $\underline{p}'$ a $\underline{p}^{i-1}$ è data da

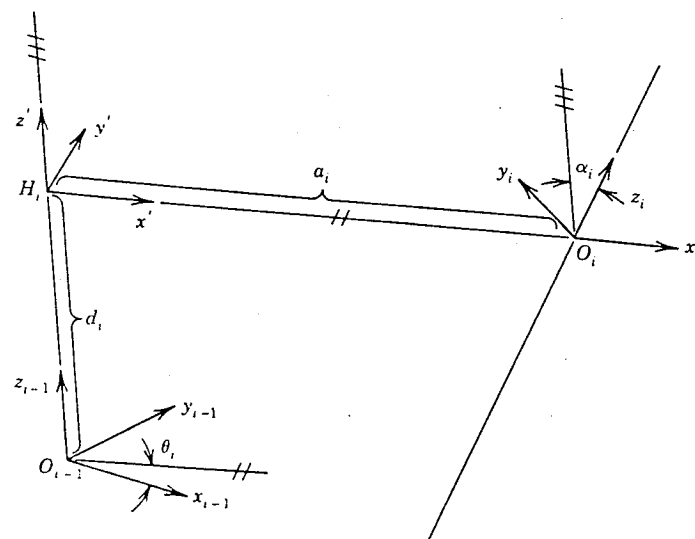


Fig. 3.3

$$p^{i-1} = A_{int}^{i-1} p, \quad (3.3)$$

dove

$$A_{int}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Combinando la (3.1) e la (3.3) si ha

$$p^{i-1} = A_i^{i-1} p^i \quad (3.5)$$

dove

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

La matrice A_i^{i-1} rappresenta la posizione e l'orientamento della terna i relativa alla terna $i-1$. Come in precedenza i primi 3 vettori colonna (3×1) contengono i coseni direttori degli assi coordinati della terna i , laddove l'ultimo vettore colonna (3×1) rappresenta la posizione dell'origine O_i .

3.3 Equazioni cinematiche

Facendo uso della notazione di Denavit-Hartenberg, si possono finalmente esprimere la posizione e l'orientamento dell'organo terminale in funzione delle variabili di giunto. A seconda del tipo di giunto, si avrà l'angolo θ_i o la distanza d_i come variabile. In via del tutto generale si può

pensare di indicare con q_i la variabile di giunto, la quale sarà definita come

$$q_i = \theta_i \quad \text{per un giunto di rotazione}$$

$$q_i = d_i \quad \text{per un giunto prismatico}$$

Pertanto la posizione e l'orientamento del braccio i relativi al braccio $i-1$ vengono descritti in funzione di q_i ricorrendo alla matrice omogenea $A_i^{i-1}(q_i)$.

L'obiettivo quindi è quello di descrivere la posizione e l'orientamento dell'ultimo braccio, relativamente alla terna base, in funzione delle variabili di giunto $q_1 \dots q_n$. Come illustrato in Fig. 3.4, il manipolatore è formato da $(n+1)$ bracci partendo dalla base fino all'estremità, dove i relativi posizione e orientamento dei bracci adiacenti sono rappresentati da matrici omogenee. Se si considerano le n trasformazioni di coordinate consecutive lungo il meccanismo seriale, si possono ottenere la posizione e l'orientamento dell'organo terminale visti dalla terna base. Più specificamente, dalla (2.24), la posizione e l'orientamento dell'ultimo braccio relativi alla terna base risultano dati da

$$T = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2) \dots A_n^{n-1}(q_n) \quad (3.7)$$

dove T è la matrice (4×4) rappresentativa della posizione e dell'orientamento dell'ultimo braccio rispetto alla terna base, come illustrato in Fig. 3.4. La (3.7) fornisce la relazione funzionale tra la posizione e l'orientamento dell'ultimo braccio e le variabili di giunto della catena cinematica aperta. Essa prende il nome di equazione cinematica del manipolatore, poiché ne governa il comportamento cinematico [2].

Esistono tuttavia diverse eccezioni alle regole basate sulla notazione di Denavit-Hartenberg. Per definire una

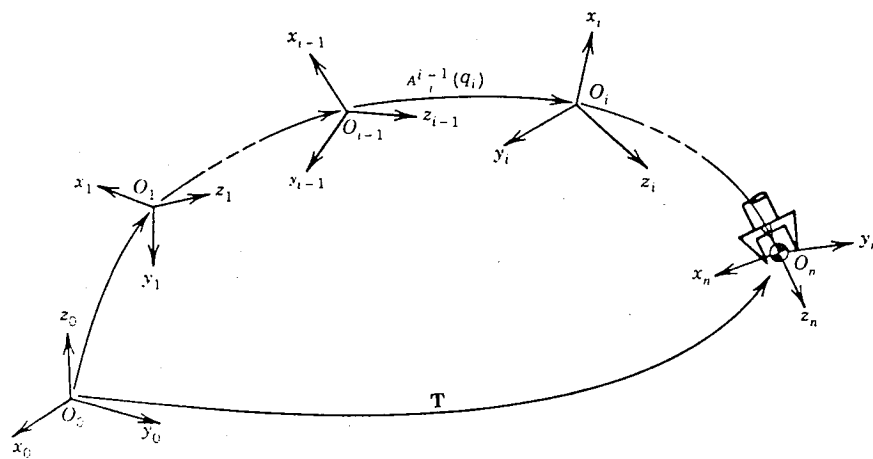


Fig. 3.4

terna di coordinate per ogni braccio, bisogna definire la normale comune tra i due assi di giunto interessati. Tale normale, tuttavia, non esiste per la base e per l'ultimo braccio, poiché vi è un solo asse per ciascuno di tali bracci. In tal caso si deve procedere in maniera diversa per definire le terne di coordinate. Per l'ultimo braccio, l'origine della terna può essere scelta in un punto opportuno dell'organo terminale, come illustrato in Fig. 3.5. L'orientamento della terna, tuttavia, deve essere determinato in modo che l'asse x_n intersechi l'asse dell'ultimo giunto formando un angolo di 90° . L'angolo α_n nella figura risulta arbitrario. Per il braccio base, invece, l'origine della terna può essere scelta in un punto arbitrario lungo l'asse del giunto 1, come mostrato in Fig. 3.6. L'asse z_0 deve essere parallela all'asse del giunto, laddove l'orientamento degli assi x ed y attorno a tale asse è del tutto arbitrario.

Infine, vi sono altre due eccezioni da tener conto per i bracci intermedi. Nel caso in cui gli assi di due giunti adiacenti ad un braccio intermedio risultino paralleli, la normale comune tra di essi non è identificata in maniera univoca. La sua scelta quindi è del tutto arbitraria. Solitamente si sceglie quella che passa attraverso l'origine O_{i-1} della Fig. 3.2, in modo da ottenere una distanza d_i nulla. L'altra eccezione riguarda i giunti prismatici. Per un giunto prismatico solo la direzione dell'asse del giunto risulta significativa, pertanto la posizione dell'asse può essere scelta in maniera del tutto arbitraria.

3.4 Due esempi

Nel seguito si riportano due esempi relativi a due strutture cinematiche diverse: la prima è quella del manipolatore di Stanford, uno dei primi costruiti in un la-

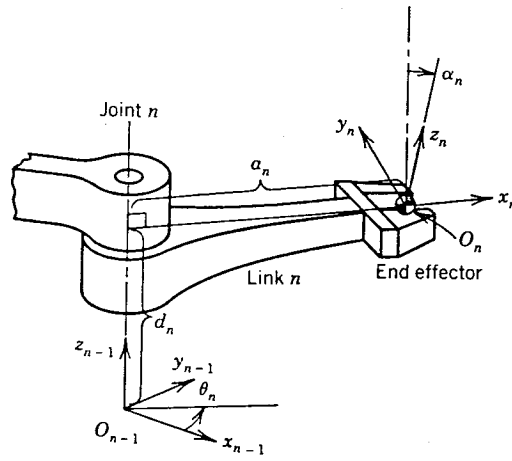


Fig. 3.5

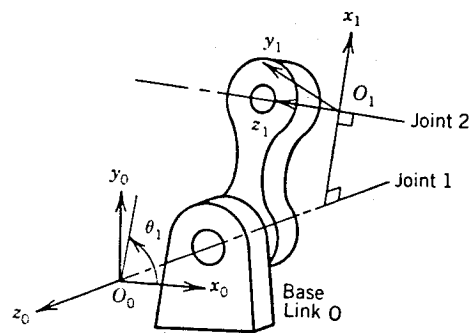


Fig. 3.6

boratorio di ricerca [2-3], mentre la seconda è relativa ad una struttura prototipo non del tutto standard [4].

3.4.1 Il manipolatore di Stanford

La Fig. 3.7 mostra il manipolatore di Stanford [2-3]; esso è caratterizzato da cinque giunti di rotazione e da un giunto prismatico. Tale tipo di struttura è stata ampiamente utilizzata in robot commerciali e manipolatori da laboratorio. Si vuole derivare l'equazione cinematica per tale manipolatore.

Il primo passo per ottenere il modello cinematico consiste nell'identificare tutti i giunti. Il primo giunto, giunto 1, è un giunto di rotazione che fa ruotare la struttura intera intorno al suo asse verticale. Il giunto 2 è anch'esso un giunto di rotazione attorno all'asse orizzontale. Il giunto 3 è un giunto prismatico che comporta un movimento di traslazione degli ultimi tre bracci. In questo caso la posizione dell'asse del giunto 3 è stata scelta in modo che essa coincida con il giunto 4. Gli ultimi tre giunti sono tutti di rotazione, ed è significativo sottolineare, per quanto si dirà in seguito, che i loro assi si intersecano nel punto comune W della figura.

Successivamente bisogna associare delle terne di coordinate ai bracci del manipolatore. La terna base viene naturalmente scelta sulla superficie di appoggio con l'asse z_0 lungo l'asse del giunto. Poiché gli assi dei giunti 1 e 2 si intersecano come mostrato in figura, la lunghezza della normale comune è zero, ed essa è diretta lungo la perpendicolare ad entrambi gli assi. Tale direzione è la direzione dell'asse x_1 , in accordo alla notazione di Denavit-Hartenberg. La seconda terna di coordinate è situata anch'essa all'intersezione degli assi dei giunti 2 e 3. Poiché gli assi dei giunti 3 e 4 coincidono, la loro normale comune non è univocamente determinata e può essere scelta

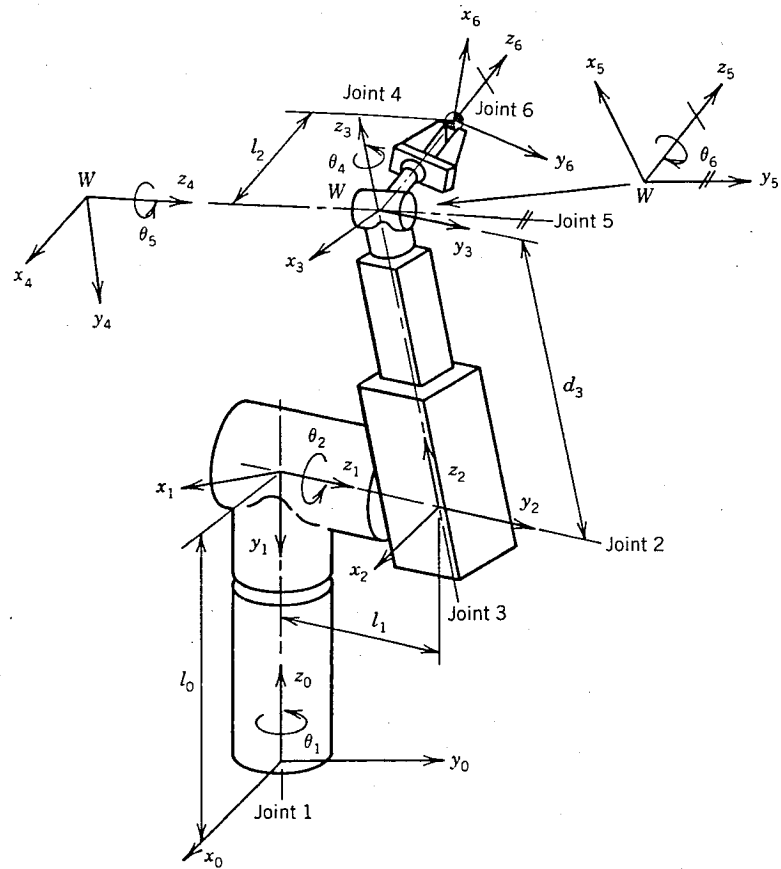


Fig. 3.7

link number	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	-90°	0	l_0	θ_1
2	$+90^\circ$	0	l_1	θ_2
3	0	0	d_3	0
4	-90°	0	0	θ_4
5	$+90^\circ$	0	0	θ_5
6	0	0	l_2	θ_6

Tab. 3.1

arbitrariamente sugli assi. Nella figura, la terza terna di coordinate è stata situata nel punto W in modo che i tre assi della terna risultino paralleli a quelli della seconda terna. Le terne 4 e 5 sono anch'esse situate nel punto W, in virtù del fatto che gli assi dei giunti si intersecano proprio in tale punto. Infine l'origine dell'ultima terna può essere scelta in maniera del tutto arbitraria; nella figura essa è stata scelta nel punto lungo l'asse del giunto 6 ove si presume che un oggetto venga afferrato dall'organo terminale.

I parametri cinematici caratteristici di Denavit-Hartenberg per tali terne sono elencati in Tab. 3.1; si noti come molti di essi siano nulli. Ciò è dovuto alla scelta 'felice' delle terne di coordinate, nel senso che l'equazione cinematica che si otterrà risulterà semplice, poiché conterrà un numero piccolo di parametri diversi da zero. La tabella mostra anche che la variabile di giunto per il giunto 3 è la distanza d_3 e che le altre variabili sono gli angoli θ_i . Altra proprietà caratteristica che emerge dalla lettura dei parametri nella tabella è che, essendo gli ultimi tre assi di rotazione concorrenti in uno stesso punto, risulta

$$a_4 = a_5 = d_5 = 0 \quad (3.8)$$

e ciò indipendentemente dal valore degli altri parametri [5].

Sostituendo quindi tali parametri nelle espressioni di tipo (3.6) si ottengono le seguenti matrici di trasformazione

$$A_1^0(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2^1(\theta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_3^2(d_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4^3(\theta_4) &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_5^4(\theta_5) &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6^5(\theta_6) &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (3.9)$$

L'equazione cinematica di tale manipolatore risulta ovviamente data da

$$T = A_1^0(\theta_1)A_2^1(\theta_2)A_3^2(d_3)A_4^3(\theta_4)A_5^4(\theta_5)A_6^5(\theta_6) \quad (3.10)$$

che in forma compatta potrà essere scritta come

$$T = \begin{bmatrix} \underline{n} & \underline{s} & \underline{a} & \underline{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ove si sono evidenziati i tre versori di orientamento $\underline{n}$, $\underline{s}$ ed $\underline{a}$ della terna associata all'organo terminale ed il vettore $\underline{p}$ relativo alla posizione dell'origine di tale terna rispetto alla terna base. Le espressioni complete di $\underline{p}$, $\underline{s}$ ed $\underline{a}$ in funzione delle variabili di giunto sono ritrovabili nell'Appendice 1; per quel che riguarda $\underline{n}$, esso è dato da $\underline{n} = \underline{s} \times \underline{a}$.

3.4.2 Il manipolatore prototipo

La Fig. 3.8 mostra il prototipo di un manipolatore costruito in un laboratorio di ricerca [4]. Come il

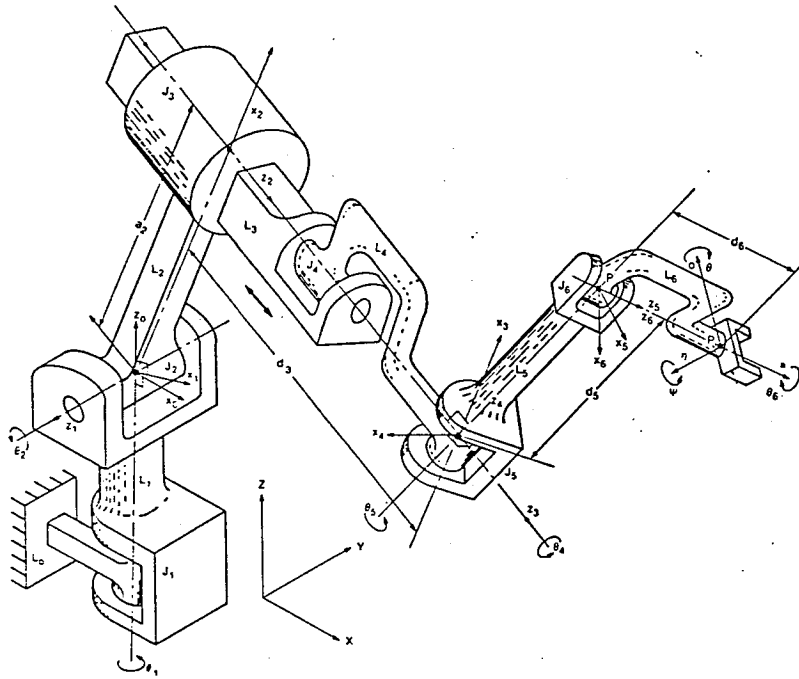


Fig. 3.8

Link	Joint Variable	Twist Angle α [°]	Length a [m]	Distance Between Normals d [m]
1	θ_1	90	0	0
2	θ_2	90	.36	0
3	d_3	0	0	d_3
4	θ_4	90	0	0
5	θ_5	-90	0	0.19
6	θ_6	0	0	0.1

Tab. 3.2

precedente, esso è caratterizzato da cinque giunti di rotazione e da uno prismatico, nella stessa sequenza del manipolatore di Stanford. La caratteristica fondamentale di tale manipolatore che lo differenzia dal precedente, tuttavia, è che gli assi di rotazione degli ultimi tre giunti non si intersecano in uno stesso punto ma, come si vede dalla figura, essi si intersecano solo a due a due. La scelta delle terne di coordinate è illustrata esaurientemente nella figura. In Tab. 3.2 invece sono riportati i parametri caratteristici di Denavit-Hartenberg per tale manipolatore. Come si vede la configurazione degli ultimi tre assi di rotazione è caratterizzata cinematicamente dall'avere

$$a_4 = a_5 = 0 \quad d_5 \neq 0 \quad (3.12)$$

indipendentemente dal valore degli altri parametri, [6].

Procedendo come per il caso precedente, si possono ottenere le matrici di trasformazione per tale manipolatore, ovvero:

$$\begin{aligned} A_1^0(\theta_1) &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2^1(\theta_2) &= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & a_2 c_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & a_2 s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_3^2(d_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4^3(\theta_4) &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (3.13) \\ A_5^4(\theta_5) &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6^5(\theta_6) &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'equazione cinematica risultante è formalmente simile a quella del caso precedente descritta dalle (3.10) e (3.11). Le espressioni di $\underline{p}$, $\underline{s}$ ed $\underline{a}$ in funzione delle variabili di giunto sono riportate nell'Appendice 2; $\underline{n} = \underline{s} \times \underline{a}$.

3.5 Cinematica differenziale

Il modello cinematico di un manipolatore ricavato nei precedenti paragrafi si è rivelato utile per determinare la posizione e l'orientamento dell'organo terminale in funzione delle variabili di giunto. In questo paragrafo si è interessati a caratterizzare cinematicamente la velocità alla quale si muove l'organo terminale; allo scopo di muovere l'organo terminale in una direzione specificata ad una velocità specificata, è necessario coordinare il moto dei singoli giunti. A tal proposito si deriveranno quelle relazioni cinematiche differenziali tra le variabili di giunto e la posizione e l'orientamento dell'organo terminale che caratterizzano tale moto.

3.5.1 Spostamenti infinitesimali

Si cominci con il considerare il manipolatore a due gradi di libertà di Fig. 3.9. E' immediato constatare che il moto di tale manipolatore è vincolato al piano x_0 - y_0 . Le equazioni cinematiche che legano la posizione dell'organo terminale (x, y) alle variabili di giunto (θ_1, θ_2) sono date da

$$x(\theta_1, \theta_2) = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \quad (3.14)$$

$$y(\theta_1, \theta_2) = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

Si vogliono caratterizzare i 'piccoli' movimenti dell'organo

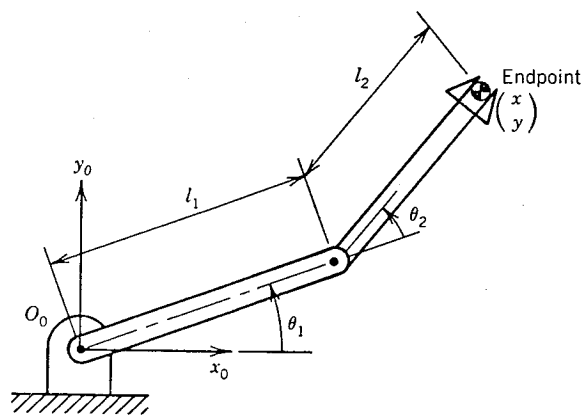


Fig. 3.9

terminale nell'intorno della sua posizione corrente. Pertanto, differenziando le (3.14), si ottengono le relazioni per il moto infinitesimale, ovvero

$$dx = \frac{\partial x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2 \quad (3.15)$$

$$dy = \frac{\partial y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2$$

che in forma vettoriale possono essere scritte come

$$d\mathbf{p} = \mathbf{J} d\mathbf{q} \quad (3.16)$$

dove $d\mathbf{p}$ e $d\mathbf{q}$ sono i vettori di spostamento infinitesimali definiti come

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad d\mathbf{q} = \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

e

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La matrice $\mathbf{J}$ comprende le derivate parziali delle funzioni $x(\theta_1, \theta_2)$ ed $y(\theta_1, \theta_2)$ rispetto alle variabili di giunto θ_1 e θ_2 . La matrice $\mathbf{J}$ prende il nome di Jacobiano del

manipolatore. Essa rappresenta la relazione infinitesimale tra le variabili di giunto e la posizione dell'organo terminale nella configurazione corrente del manipolatore.

Dalla (3.14), la matrice Jacobiana del manipolatore planare a due gradi di libertà è data da

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Si noti come gli elementi dello Jacobiano varino secondo la configurazione del braccio, essendo funzione delle variabili di giunto.

Si consideri ora l'istante di tempo quando i due giunti del manipolatore si muovono alle velocità $\dot{\underline{\theta}} = (\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2)^T$, e sia $\underline{v} = (\dot{x} \ \dot{y})^T$ il corrispondente vettore velocità dell'organo terminale. Lo Jacobiano rappresenta la relazione tra le velocità di giunto e le velocità risultanti all'organo terminale. Infatti, dividendo ambo i membri della (3.16) per l'incremento temporale infinitesimo dt , si ottiene

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = J \frac{d\underline{\theta}}{dt}$$

ovvero

$$\underline{v} = J \dot{\underline{\theta}} \quad (3.20)$$

Siano $\underline{j}_1$ e $\underline{j}_2$ i due vettori colonna (2×1) dello Jacobiano (3.19). La (3.20) può scriversi come

$$\underline{v} = \underline{j}_1 \dot{\theta}_1 + \underline{j}_2 \dot{\theta}_2 \quad (3.21)$$

Si vede come i due termini a secondo membro rappresentino i contributi di velocità indotti all'organo terminale rispettivamente dal primo e dal secondo giunto. Si può affermare

quindi che ogni vettore colonna dello Jacobiano rappresenta la velocità all'organo terminale generata dal moto del corrispondente giunto a velocità unitaria quando tutti gli altri giunti sono immobilizzati.

3.5.2 Rotazioni infinitesimali

Nel precedente paragrafo si sono analizzati il moto di traslazione infinitesimale e la velocità lineare all'organo terminale. Per generalizzare il risultato, bisogna considerare ora una rotazione infinitesimale e la corrispondente velocità angolare per un generico manipolatore.

Nel Capitolo 2 si sono sviluppati degli strumenti matematici per descrivere l'orientamento di un corpo rigido nello spazio. Tali metodi sono basati sull'uso delle matrici di rotazione (3 x 3) e degli angoli di Eulero per rappresentare rotazione ed orientamento di angoli finiti. Una rotazione infinitesimale o la derivata temporale di un orientamento, tuttavia, differiscono sostanzialmente dalle corrispondenti quantità finite. Di conseguenza, i metodi per rappresentare rotazioni ed orientamenti finiti non sono adeguati allorché si considerino movimenti infinitesimali. Si vuole pertanto individuare uno strumento matematico per descrivere le rotazioni infinitesimali.

Si cominci con lo scrivere la matrice di rotazione (3 x 3) rappresentativa di una rotazione infinitesimale $d\phi_x$ attorno all'asse x

$$R_x(d\phi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(d\phi_x) & -\sin(d\phi_x) \\ 0 & \sin(d\phi_x) & \cos(d\phi_x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\phi_x \\ 0 & d\phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

dove $\cos(d\phi_x) \approx 1$ e $\sin(d\phi_x) \approx d\phi_x$. Per quanto riguarda rotazioni infinitesimali attorno agli assi y e z, si possono ottenere espressioni matriciali del tutto analoghe alla

(3.22). Sia quindi $R_Y(d\phi_Y)$ la matrice di rotazione infinitesimale attorno all'asse y; il risultato di due rotazioni consecutive attorno agli assi x ed y è dato da

$$\begin{aligned}
 R_X(d\phi_X)R_Y(d\phi_Y) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\phi_X \\ 0 & d\phi_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\phi_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -d\phi_Y & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\phi_Y \\ d\phi_X d\phi_Y & 1 & -d\phi_X \\ -d\phi_Y d\phi_X & d\phi_X & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\phi_Y \\ 0 & 1 & -d\phi_X \\ -d\phi_Y & d\phi_X & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

dove si è trascurato il termine di secondo ordine $d\phi_X d\phi_Y$. Se adesso si inverte l'ordine delle rotazioni $R_Y(d\phi_Y)$ e $R_X(d\phi_X)$ e si calcola il prodotto matriciale come sopra, si trova che il risultato è lo stesso, ovvero

$$R_X(d\phi_X)R_Y(d\phi_Y) = R_Y(d\phi_Y)R_X(d\phi_X) \quad (3.24)$$

Si può affermare quindi che rotazioni infinitesimali non dipendono dall'ordine in cui esse vengono effettuate, ovvero godono della proprietà commutativa. In generale, per rotazioni infinitesimali attorno agli assi x, y e z (Fig. 3.10) si può scrivere la seguente matrice di rotazione equivalente

$$R(d\phi_X, d\phi_Y, d\phi_Z) = \begin{bmatrix} 1 & -d\phi_Z & d\phi_Y \\ d\phi_Z & 1 & -d\phi_X \\ -d\phi_Y & d\phi_X & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Come si vede la matrice di rotazione dipende solo dai tre angoli di rotazione infinitesimale, ma non dall'ordine delle rotazioni.

Nel caso poi di due rotazioni infinitesimali consecutive, $R(d\phi_X, d\phi_Y, d\phi_Z)$ ed $R(d\phi'_X, d\phi'_Y, d\phi'_Z)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
 R(d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z) R(d\phi'_x, d\phi'_y, d\phi'_z) &= \\
 &= R(d\phi_x + d\phi'_x, d\phi_y + d\phi'_y, d\phi_z + d\phi'_z)
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

dove si sono trascurati i termini di ordine maggiore al primo. Pertanto, la rotazione risultante da due rotazioni infinitesimali arbitrarie è data dalla somma algebrica delle componenti individuali per ogni asse, ovvero rotazioni infinitesimali godono della proprietà additiva.

Godendo delle proprietà additiva e commutativa, le rotazioni infinitesimali possono venire scritte come

$$\underline{d\phi} = \begin{bmatrix} d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{bmatrix}
 \tag{3.27}$$

Il vettore rotazione infinitesimale $\underline{d\phi}$ può quindi essere rappresentato come in Fig. 3.10. La sua direzione rappresenta l'asse di rotazione e la sua lunghezza l'ampiezza della rotazione.

E' da sottolineare che la rappresentazione vettoriale è valida solo per rotazioni infinitesimali, ma non per rotazioni finite. La Fig. 3.11 mostra appunto che le rotazioni finite non possono venir trattate come vettori. L'oggetto rettangolare in figura viene ruotato attorno agli assi x ed y secondo ordini differenti. Se lo si ruota attorno all'asse x prima e poi attorno all'asse y, l'orientamento risultante è quello in figura (a). Invertendo l'ordine delle rotazioni, si ottiene l'orientamento di figura (b), che differisce completamente da quello di figura (a). Se invece si considerassero due rotazioni infinitesimali, i due vettori risultanti corrispondenti alle due rotazioni in ordine differente risulterebbero identici.

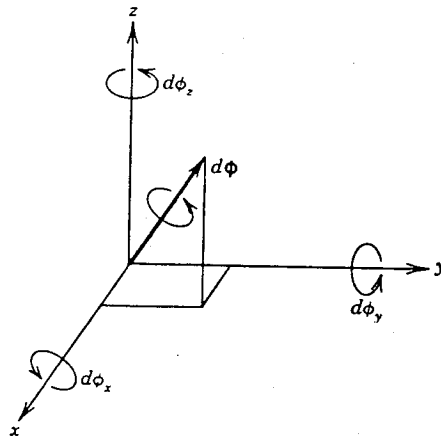


Fig. 3.10

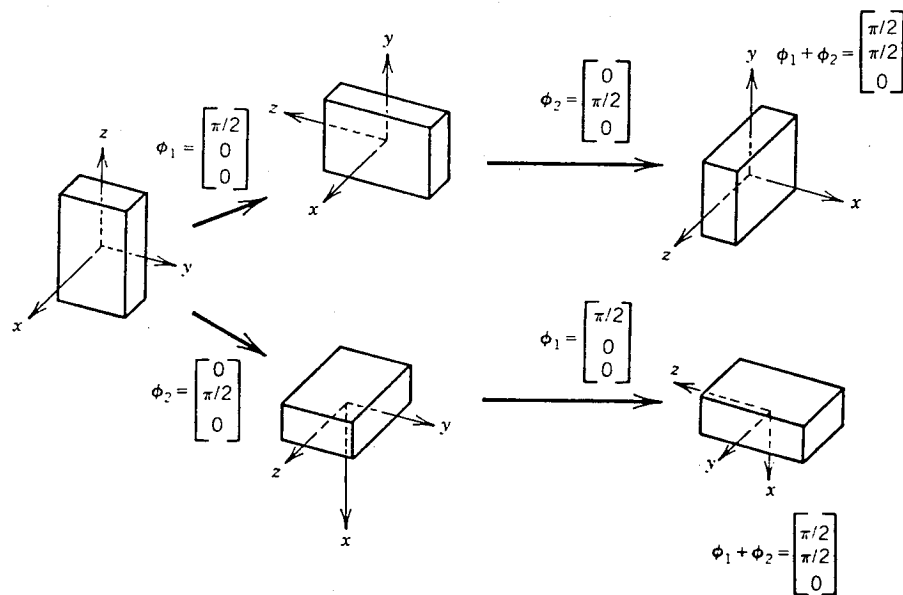


Fig. 3.11

3.6 Calcolo dello Jacobiano di un manipolatore

Si consideri ora un generico manipolatore ad n gradi di libertà; si vuole calcolare lo Jacobiano associato ad una traslazione ed una rotazione infinitesimali dell'organo terminale [3]. Come indicato in Fig. 3.12, si denotino rispettivamente con $d\underline{p}_e$ e $d\underline{\phi}_e$ la traslazione e la rotazione infinitesimali dell'organo terminale. Entrambi i vettori si intendono rappresentati rispetto alla terna base $O_0-x_0y_0z_0$. Si possono unire i due vettori in un unico vettore (6×1) $d\underline{x}$ come

$$d\underline{x} = \begin{bmatrix} d\underline{p}_e \\ d\underline{\phi}_e \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Dividendo entrambi i membri per l'incremento temporale infinitesimo dt , si ottiene il vettore velocità dell'organo terminale

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{p}}_e \\ \underline{\omega}_e \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La velocità dell'organo terminale è legata linearmente alle velocità di giunto dallo Jacobiano del manipolatore, ovvero

$$\dot{\underline{x}} = J\dot{\underline{q}} \quad (3.30)$$

ove $\dot{\underline{q}} = (\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)^T$ è il vettore delle velocità ai giunti. Lo Jacobiano pertanto risulta essere una matrice $(6 \times n)$; le prime tre righe relative al vettore velocità lineare $\underline{v}_e$, le seconde tre righe corrispondenti al vettore velocità angolare $\underline{\omega}_e$. Ogni colonna, d'altra parte, rappresenta la velocità generata dal singolo giunto corrispondente. Si vogliono

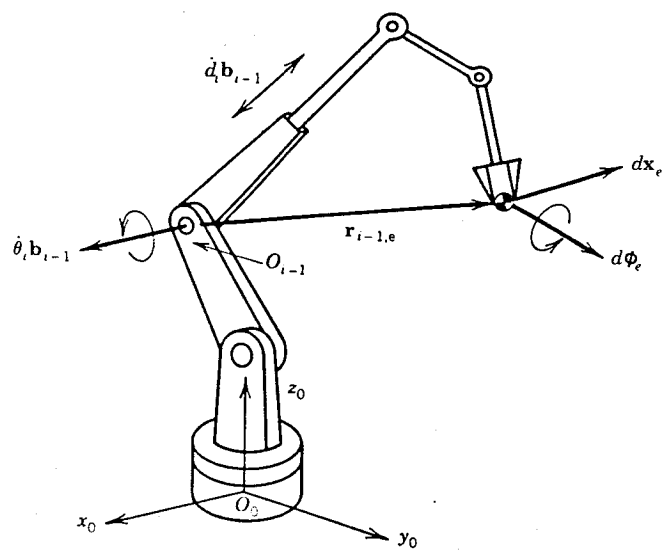


Fig. 3.12

determinare ora i singoli vettori colonna dello Jacobiano in funzione dei parametri cinematici caratteristici precedentemente introdotti e della configurazione del manipolatore. Siano j_{Li} e j_{Ai} i vettori colonna (3×1) relativi alle velocità lineari ed angolari rispettivamente. La matrice J può essere partizionata come

$$J = \begin{bmatrix} j_{L1} & j_{L2} & \dots & j_{Ln} \\ j_{A1} & j_{A2} & \dots & j_{An} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

La velocità lineare dell'organo terminale può scriversi come

$$\underline{v}_e = j_{L1}\dot{q}_1 + \dots + j_{Ln}\dot{q}_n \quad (3.32)$$

Se il giunto i è prismatico, il contributo di velocità all'organo terminale è diretto lungo l'asse stesso del giunto. Sia $\underline{b}_{i-1}$ il versore dell'asse i , come in Fig. 3.12, e sia $\dot{d}_i$ la velocità scalare del giunto in tale direzione; si ha

$$j_{Li}\dot{q}_i = \underline{b}_{i-1}\dot{d}_i \quad (3.33)$$

Si ricordi che, secondo la notazione di Denavit-Hartenberg, la velocità del giunto $\dot{d}_i$ viene misurata lungo l'asse z_{i-1} . Se invece si ha un giunto di rotazione, come in figura, i bracci a valle del giunto i vengono ruotati alla velocità angolare $\underline{\omega}_i$ data da

$$\underline{\omega}_i = \underline{b}_{i-1}\dot{\theta}_i \quad (3.34)$$

Tale velocità angolare produce tuttavia una velocità lineare all'organo terminale. Sia $\underline{r}_{i-1,e}$ il vettore posizione dal punto O_{i-1} all'organo terminale come in figura; la velocità lineare generata dalla velocità angolare $\underline{\omega}_i$ risulta

$$\underline{j}_{Li} \dot{q}_i = \underline{\omega}_i \underline{x}_{r_{i-1},e} = (\underline{b}_{i-1} \underline{x}_{r_{i-1},e}) \dot{\theta}_i \quad (3.35)$$

Pertanto la velocità lineare all'organo terminale è data dalla (3.33) o dalla (3.35) a seconda che il giunto i sia prismatico o di rotazione rispettivamente.

In maniera analoga, la velocità angolare dell'organo terminale può esprimersi come combinazione lineare dei vettori colonna $\underline{j}_{Ai}$ nella (3.18),

$$\underline{\omega}_e = \underline{j}_{A1} \dot{q}_1 + \dots + \underline{j}_{An} \dot{q}_n \quad (3.36)$$

Se il giunto i è prismatico, ovviamente, non si ha alcun contributo di velocità angolare all'organo terminale, ovvero

$$\underline{j}_{Ai} \dot{q}_i = \underline{0} \quad (3.37)$$

Se invece il giunto i è di rotazione, la velocità angolare è data da

$$\underline{j}_{Ai} \dot{q}_i = \underline{\omega}_i = \underline{b}_{i-1} \dot{\theta}_i \quad (3.38)$$

Le equazioni (3.33), (3.35), (3.37) e (3.38) caratterizzano completamente lo Jacobiano del manipolatore. In sintesi

$$\begin{bmatrix} \underline{j}_{Li} \\ \underline{j}_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_{i-1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{per un giunto prismatico} \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{j}_{Li} \\ \underline{j}_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_{i-1} \underline{x}_{r_{i-1},e} \\ \underline{b}_{i-1} \end{bmatrix} \quad \text{per un giunto di rotaz.} \quad (3.40)$$

I vettori $\underline{b}_{i-1}$ ed $\underline{x}_{r_{i-1},e}$ nelle espressioni sopra risultano funzione delle variabili di giunto. Tali vettori possono essere calcolati adoperando le trasformazioni di coordinate discusse in precedenza. La direzione dell'asse del giunto

$i-1$ è rappresentata da $\bar{b} = (0 \ 0 \ 1)^T$ rispetto alla terna di coordinate $i-1$, essendo l'asse del giunto lungo l'asse z_{i-1} . Il vettore $\bar{b}$ può essere trasformato nel vettore $\underline{b}_{i-1}$, definito rispetto alla terna base, a mezzo delle matrici di rotazione $R_j^{j-1}(q_j)$ come

$$\underline{b}_{i-1} = R_1^0(q_1) \dots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \bar{b} \quad (3.41)$$

Il vettore posizione $\underline{r}_{i-1,e}$ può essere calcolato a mezzo delle matrici $A_j^{j-1}(q_j)$. Sia $\underline{p}_{i-1,e}$ il vettore esteso (4×1) corrispondente ad $\underline{r}_{i-1,e}$, e $\bar{p} = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$ il vettore posizione esteso rappresentativo dell'origine della propria terna di coordinate; il vettore posizione $\underline{r}_{i-1,e}$ viene ricavato da

$$\underline{p}_{i-1,e} = A_1^0(q_1) \dots A_n^{n-1}(q_n) \bar{p} - A_1^0(q_1) \dots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \bar{p} \quad (3.42)$$

ove il primo termine tiene conto del vettore posizione dall'origine O_0 all'organo terminale ed il secondo termine del vettore posizione da O_0 ad O_{i-1} .

3.7 Una rappresentazione alternativa dello Jacobiano

Una rappresentazione alternativa dello Jacobiano di un manipolatore, per quel che riguarda la descrizione della velocità angolare all'organo terminale, può ottenersi considerando l'orientamento dell'organo terminale espresso in termini della terna di versori $\underline{s}$, $\underline{a}$, $\underline{n}$ definiti nella (2.2) [7].

In particolare si possono scrivere i legami tra le velocità di giunto e le derivate temporali di tali versori

$$\dot{\underline{s}} = J_s \dot{\underline{q}} \quad \dot{\underline{a}} = J_a \dot{\underline{q}} \quad \dot{\underline{n}} = J_n \dot{\underline{q}} \quad (3.43)$$

ove J_s , J_a , J_n sono le matrici Jacobiane (3 x 3) definite come

$$J_s = \frac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{q}} \quad J_a = \frac{\partial \underline{a}}{\partial \underline{q}} \quad J_n = \frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{q}} \quad (3.44)$$

Sembrerebbe quindi che in tal modo si sia estesa la dimensione dello Jacobiano, relativamente all'orientamento. Tuttavia, bisogna tener conto del vincolo che i versori $\underline{s}$, $\underline{a}$, $\underline{n}$ siano ortonormali, espresso dalle (2.3) e (2.4). Se si differenziano infatti tali relazioni rispetto al tempo, si ottengono rispettivamente:

$$\underline{s}^T \dot{\underline{a}} + \underline{a}^T \dot{\underline{s}} = 0 \quad \underline{a}^T \dot{\underline{n}} + \underline{n}^T \dot{\underline{a}} = 0 \quad \underline{n}^T \dot{\underline{s}} + \underline{s}^T \dot{\underline{n}} = 0 \quad (3.45)$$

$$\underline{s}^T \dot{\underline{s}} = 0 \quad \underline{a}^T \dot{\underline{a}} = 0 \quad \underline{n}^T \dot{\underline{n}} = 0 \quad (3.46)$$

Tenendo conto ora delle (3.43), si ottiene l'insieme dei vincoli da imporre agli Jacobiani definiti nella (3.44)

$$\begin{aligned} \underline{s}^T J_a \dot{\underline{q}} + \underline{a}^T J_s \dot{\underline{q}} &= 0 \\ \underline{a}^T J_n \dot{\underline{q}} + \underline{n}^T J_a \dot{\underline{q}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\underline{n}^T J_s \dot{\underline{q}} + \underline{s}^T J_n \dot{\underline{q}} = 0$$

e

$$\underline{s}^T J_s \dot{\underline{q}} = 0 \quad \underline{a}^T J_a \dot{\underline{q}} = 0 \quad \underline{n}^T J_n \dot{\underline{q}} = 0 \quad (3.48)$$

Le equazioni (3.47) e (3.48), inoltre, portano all'individuazione di un insieme di proprietà cinematiche sui sottospazi vettoriali descritti dai vettori che compaiono in tali equazioni [7]. Pertanto ora si ricaveranno tali proprietà, poiché esse torneranno utili in seguito nel derivare

gli algoritmi di inversione cinematica basati sulla definizione degli Jacobiani come nella (3.44).

Cominciando a considerare la (3.48) si può osservare che, dovendo tali vincoli essere soddisfatti per qualsiasi valore delle velocità ai giunti $\dot{\underline{q}}$, deve necessariamente risultare

$$\underline{J}_s^T \underline{s} = \underline{0} \quad \underline{J}_a^T \underline{a} = \underline{0} \quad \underline{J}_n^T \underline{n} = \underline{0} \quad (3.49)$$

La (3.49) equivale anche ad affermare che deve risultare

$$\underline{s} \in N(\underline{J}_s^T) \quad \underline{a} \in N(\underline{J}_a^T) \quad \underline{n} \in N(\underline{J}_n^T) \quad (3.50)$$

dove $N(A)$ denota lo spazio nullo della matrice A .

Poiché le matrici $\underline{J}_s$, $\underline{J}_a$, $\underline{J}_n$ stabiliscono la relazione fisica tra le velocità ai giunti $\dot{\underline{q}}$ e le velocità Cartesiane $\dot{\underline{s}}$, $\dot{\underline{a}}$, $\dot{\underline{n}}$, si comprende come, in virtù della (3.49), il rango di tale matrici debba essere al più pari a 2. Il "range" $\mathcal{R}$ di ognuna di tali matrici, inoltre, risulta proprio essere il piano ortogonale al corrispondente versore. Tenendo poi presente che il complemento ortogonale del range di una matrice è lo spazio nullo della sua trasposta, $\mathcal{R}(A)^\perp = N(A)$ dove $\perp$ denota il complemento ortogonale, si ha pure che lo spazio nullo della trasposta di ognuna di tali matrici, per la (3.50), è nella direzione dei versori stessi. In breve risulta

$$\text{rank}(\underline{J}_s) \leq 2 \quad \text{rank}(\underline{J}_a) \leq 2 \quad \text{rank}(\underline{J}_n) \leq 2 \quad \forall \underline{q}, \dot{\underline{q}} \quad (3.51)$$

dove "rank" denota il rango della matrice, e

$$N(J_s^T) = \text{span}(\underline{s})$$

$$N(J_a^T) = \text{span}(\underline{a}) \quad \forall \underline{q}, \dot{\underline{q}} \quad (3.52)$$

$$N(J_n^T) = \text{span}(\underline{n})$$

dove "span" denota la direzione del vettore.

In maniera analoga, dalla (3.47) si può osservare che, dovendo tale vincolo essere soddisfatto per qualunque valore delle velocità ai giunti $\dot{\underline{q}}$, l'unica possibilità è che risulti

$$J_{a\underline{s}}^T + J_{s\underline{a}}^T = \underline{0}$$

$$J_{n\underline{a}}^T + J_{a\underline{n}}^T = \underline{0} \quad (3.53)$$

$$J_{s\underline{n}}^T + J_{n\underline{s}}^T = \underline{0}$$

Si considerino i vettori $(J_{s\underline{a}}^T, J_{a\underline{n}}^T, J_{n\underline{s}}^T)$, che per semplicità di notazione vengano indicati come $(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3)$. Si vuole dimostrare ora che tali vettori risultano linearmente indipendenti. Infatti, per la (3.53) essi devono essere tali che

$$\underline{k}_1 \in R(J_s^T) \cap R(J_a^T)$$

$$\underline{k}_2 \in R(J_a^T) \cap R(J_n^T) \quad (3.54)$$

$$\underline{k}_3 \in R(J_n^T) \cap R(J_s^T)$$

Orbene, se risultasse ad es. $R(J_s^T) = R(J_a^T)$, $\underline{k}_2$ dovrebbe risultare parallelo a $\underline{k}_3$, ovvero $\underline{k}_2 = \alpha \underline{k}_3$, portando all'assurdo $J_n^T(\alpha \underline{s} - \underline{a}) = \underline{0}$; infatti $(\alpha \underline{s} - \underline{a})$ è un vettore nel piano ortogonale ad $\underline{n}$, mentre J_n^T ha il suo spazio nullo proprio nella direzione di $\underline{n}$. Si comprende ora come i tre range di J_s^T, J_a^T, J_n^T in generale non coincidano tra loro e, inoltre,

si vede che essi non possono avere una retta in comune poiché in tal caso i tre vettori $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$ giacerebbero tutti lungo tale retta, ma ciò non può accadere dal momento che essi non risultano paralleli a due a due. Ne consegue, infine, che i tre vettori $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$ sono linearmente indipendenti e formano una base vettoriale nello spazio R^3 .

Bibliografia

- [1] J. Denavit and R.S. Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices," ASME J. Appl. Mech., 22, June 1955.
- [2] R.P. Paul, Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control, MIT Press, 1982.
- [3] H. Asada and J.-J.E. Slotine, Robot Analysis and Control, Wiley, 1986.
- [4] V.J. Lumelski, "Iterative coordinate transformation procedure for one class of robots," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 14, 3, May/June 1984.
- [5] G. De Maria, L. Sciavicco and B. Siciliano, "A general solution algorithm to coordinate transformation for robotic manipulators," '85 ICAR, Tokyo, Japan, Sept. 1985.
- [6] L. Sciavicco and B. Siciliano, "Coordinate transformation: A solution algorithm for one class of robots," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 16, 4, July/Aug. 1986.
- [7] A. Balestrino, G. De Maria, L. Sciavicco and B. Siciliano, "A novel approach to coordinate transformation for robotic manipulators," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., publ. pending, 1986.

4. PROBLEMA CINEMATICO INVERSO

4.1 Introduzione

Le equazioni cinematiche derivate nel capitolo precedente forniscono la relazione funzionale tra la posizione e l'orientamento dell'organo terminale e le variabili di giunto. La deduzione di tali relazioni risolve il problema cinematico diretto. E' pertanto possibile determinare direttamente la posizione e l'orientamento dell'organo terminale a partire da una generica configurazione cinematica del manipolatore, caratterizzata dai valori assunti dalle variabili di giunto.

Trovare le variabili di giunto che portano l'organo terminale in una posizione e un orientamento specificati costituisce il problema inverso al precedente, e più complesso. Esso prende il nome di problema cinematico inverso. Bisogna quindi risolvere l'equazione cinematica nelle variabili di giunto, una volta assegnati posizione ed orientamento dell'organo terminale. Una volta risolta l'equazione cinematica inversa, si può effettuare lo spostamento desiderato dell'organo terminale portando ogni giunto al valore determinato.

Nel problema cinematico diretto, la posizione e l'orientamento dell'organo terminale possono essere determinati in maniera univoca, una volta assegnate le variabili di giunto. Il problema cinematico inverso, invece, risulta molto più complesso nel senso che possono aversi soluzioni multiple per la stessa configurazione dell'organo terminale. Inoltre, per un particolare insieme di configurazioni dell'organo terminale la soluzione può essere non ammissibile in relazione alla struttura del manipolatore. Per di più, essendo l'equazione cinematica tipicamente nonlineare, non sempre è possibile trovare una soluzione in forma chiusa, ovvero una

funzione esplicita inversa dell'equazione cinematica. In tal caso bisogna ricorrere a tecniche numeriche di soluzione.

Un manipolatore deve possedere almeno sei gradi di libertà per posizionare il suo organo terminale in un punto arbitrario con un orientamento arbitrario nello spazio. Manipolatori con meno di sei gradi di libertà non sono in grado di effettuare tale compito. D'altro canto, se un manipolatore possiede più di sei gradi di libertà, esiste un numero infinito di soluzioni all'equazione cinematica. Si consideri ad es. il braccio umano; esso possiede sette gradi di libertà, escludendo i giunti in corrispondenza delle dita. E' pressoché immediato constatare che anche se la mano è fissa al tavolo, è possibile cambiare in maniera continua la posizione del gomito senza muovere affatto la mano. Ciò implica che esiste un insieme infinito di variabili di giunto che conducono la mano nella stessa posizione e orientamento. I manipolatori con più di sei gradi di libertà vengono detti manipolatori ridondanti, e saranno ripresi nel seguito.

4.2 Esistenza di una soluzione

La domanda se vi siano soluzioni o meno al problema cinematico inverso fa sorgere spontaneo il concetto di spazio di lavoro di un manipolatore. In prima battuta, lo spazio di lavoro può identificarsi con il volume dello spazio che può raggiungere l'organo terminale del manipolatore. Affinché ci sia una soluzione, la collocazione specificata dell'organo terminale deve appartenere a tale spazio di lavoro. Talvolta torna utile considerare due distinte definizioni di spazio di lavoro [1]: lo spazio di lavoro con destrezza è quel volume dello spazio che l'organo terminale del manipolatore può raggiungere con un suo orientamento arbitrario. Lo spazio di lavoro raggiungibile è invece quel volume dello spazio che il manipolatore può raggiungere con almeno un

orientamento del suo organo terminale. Lo spazio di lavoro con destrezza, ovviamente, è un sottoinsieme di quello raggiungibile.

Si consideri ad es. lo spazio di lavoro del manipolatore a due bracci di Fig. 4.1. Se $l_1 = l_2$, lo spazio di lavoro raggiungibile è un disco di raggio $2l_1$. Lo spazio di lavoro con destrezza consiste di un punto singolo, l'origine. Se $l_1 \neq l_2$, invece, non vi è alcuno spazio di lavoro con destrezza, e lo spazio di lavoro raggiungibile diventa un anello di raggio esterno $l_1 + l_2$ e raggio interno $l_1 - l_2$. All'interno dello spazio di lavoro raggiungibile esistono due orientamenti possibili dell'organo terminale. Ai confini dello spazio di lavoro uno solo è l'orientamento possibile.

In tali considerazioni sullo spazio di lavoro di un manipolatore a due bracci, si è implicitamente supposto che i giunti possano ruotare di 360° . Ciò raramente è vero nel caso di meccanismi reali. Quando la corsa dei giunti è un sottoinsieme dei 360° pieni, lo spazio di lavoro va ovviamente a ridursi, o nella sua estensione o nel numero di orientamenti possibili. Ad es. se il manipolatore di Fig. 4.1 ha piena corsa per θ_1 , ma solo $0 \leq \theta_2 \leq 180$, lo spazio di lavoro raggiungibile ha la stessa estensione, ma solo un orientamento è possibile in ogni punto.

Quando un manipolatore possiede meno di sei gradi di libertà, esso non può raggiungere posizioni ed orientamenti arbitrariamente assegnati nello spazio. E' chiaro che il manipolatore planare di Fig. 4.1 non può raggiungere alcun punto al di fuori del piano, così ogni punto obiettivo ad una quota non nulla è irraggiungibile. In molte applicazioni pratiche, tuttavia, vengono impiegati manipolatori a quattro o cinque gradi di libertà, poiché i compiti che essi devono svolgere non prevedono che essi debbano raggiungere posizioni ed orientamenti arbitrari nello spazio; ad es. in un robot che debba eseguire una saldatura ad arco, sono sufficienti solo cinque gradi di libertà, poiché la rotazione

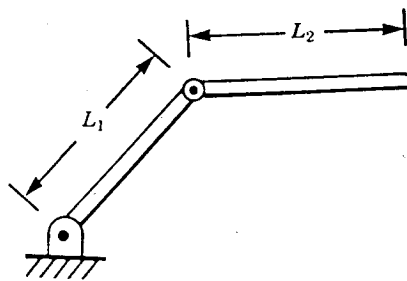


Fig. 4.1

dell'organo terminale attorno all'asse normale alla superficie di lavoro è del tutto inessenziale al compito di saldare.

Si può concludere quindi con l'affermare che lo spazio di lavoro di un manipolatore va analizzato caso per caso, in relazione anche alla particolare applicazione del robot. In generale lo spazio di lavoro di un robot risulta un sottospazio dello spazio di lavoro teorico del manipolatore.

4.3 Soluzioni multiple

Un altro problema che si incontra nel risolvere l'equazione cinematica è quello delle soluzioni multiple. Un manipolatore planare con tre giunti di rotazione, ad es., ha uno spazio di lavoro con destrezza sufficientemente esteso nel piano (assegnando lunghezze dei bracci opportune ed ampie corse ai giunti) poiché ogni posizione all'interno del suo spazio di lavoro può essere raggiunta con orientamento arbitrario. La Fig. 4.2 mostra un manipolatore planare a tre bracci con il suo organo terminale in una certa posizione ed in un certo orientamento. Le linee tratteggiate, tuttavia, indicano una seconda possibile configurazione in cui si hanno la stessa posizione e lo stesso orientamento.

Il fatto che un manipolatore abbia soluzioni multiple può comportare dei problemi poiché il sistema di controllo deve essere in grado di sceglierne una. I criteri di scelta variano, ma una scelta ragionevole potrebbe essere quella della soluzione adiacente. Ad es., se il manipolatore è nel punto A come in Fig. 4.3, e si vuole muoverlo nel punto B, una scelta opportuna sarebbe optare per la soluzione che minimizza lo spostamento di ogni giunto. Pertanto, in assenza dell'ostacolo, si sceglierebbe la configurazione tratteggiata superiore della figura. Ciò suggerisce che un dato di ingresso per una procedura di inversione cinematica potrebbe

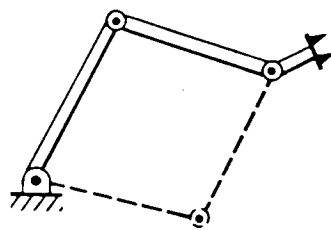


Fig. 4.2

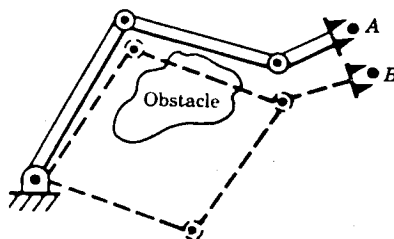


Fig. 4.3

essere la posizione corrente del manipolatore. In tal modo, se scelta vi è, l'algoritmo può scegliere la soluzione adiacente nello spazio dei giunti. Tuttavia, il concetto di adiacenza non è definibile in maniera assoluta. Manipolatori tipici, ad es., possono avere tre bracci lunghi seguiti da tre bracci più corti in prossimità dell'organo terminale. In tal caso si potrebbe pensare di applicare dei pesi nella scelta della soluzione adiacente in modo da favorire lo spostamento dei bracci corti, invece che quelli lunghi. La presenza di ostacoli può comportare la scelta della soluzione più lontana, se quella più vicina causasse una collisione (Fig. 4.3).

Il numero di soluzioni dipende dal numero dei giunti del manipolatore, ma è anche funzione dei parametri cinematici caratteristici, introdotti nel § 3.2, e della corsa dei giunti. In generale si può affermare che maggiore è il numero di tali parametri diversi da zero, maggiore sarà il numero di configurazioni ammissibili per raggiungere una posizione ed un orientamento assegnati dell'organo terminale [2-3].

4.4 Soluzione dell'equazione cinematica per il manipolatore di Stanford

Si riconsideri il manipolatore di Stanford del § 3.4. L'equazione cinematica è data da

$$T = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 A_6^5 \quad (4.1)$$

con le matrici A specificate nella (3.9). Per tale manipolatore, una volta assegnata una posizione ed un orientamento dell'organo terminale T, si può dimostrare che esistono soluzioni in forma chiusa [4]. L'equazione (4.1) può riscriversi moltiplicando a destra ambo i membri per l'inversa di

A_6^5 , ovvero

$$T(A_6^5)^{-1} = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 \quad (4.2)$$

Moltiplicando quindi a sinistra ambo i membri per $(A_1^0)^{-1}$ si ha

$$(A_1^0)^{-1} T(A_6^5)^{-1} = A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 \quad (4.3)$$

Il primo membro della (4.2) risulta funzione solo di θ_6 , mentre il secondo membro è funzione di tutte le altre variabili di giunto. In maniera analoga, l'equazione (4.3) ha θ_1 e θ_6 a primo membro e le rimanenti variabili a secondo membro. Si vuole ora trovare un'espressione opportuna che permetta di risolvere l'equazione cinematica.

A tale scopo, si interpreti il significato fisico delle differenti espressioni adottando una rappresentazione grafica. La Fig. 4.4 mostra lo scheletro della struttura del manipolatore di Stanford. Ogni arco della figura rappresenta la relazione tra due terne di coordinate, e la matrice (4 x 4) sull'arco dà la posizione e l'orientamento della terna vista nella terna all'origine dell'arco. Il prodotto di matrici multiple rappresenta la posizione e l'orientamento della terna finale vista nella terna iniziale lungo il percorso degli archi associati con le matrici. Il primo membro dell'equazione cinematica originaria rappresenta la posizione e l'orientamento dell'organo terminale viste direttamente nella terna base, laddove il secondo membro rappresenta gli stessi posizione ed orientamento attraverso un altro percorso lungo il meccanismo. Entrambi i membri della (4.2), poi, rappresentano la posizione e l'orientamento della terna associata al braccio 5 rispetto alla terna base attraverso due percorsi differenti che portano alla stessa terna. L'origine della terna 5 è nel punto W, le cui coordinate sono rappresentate dalla quarta colonna delle matrici nell'equazione

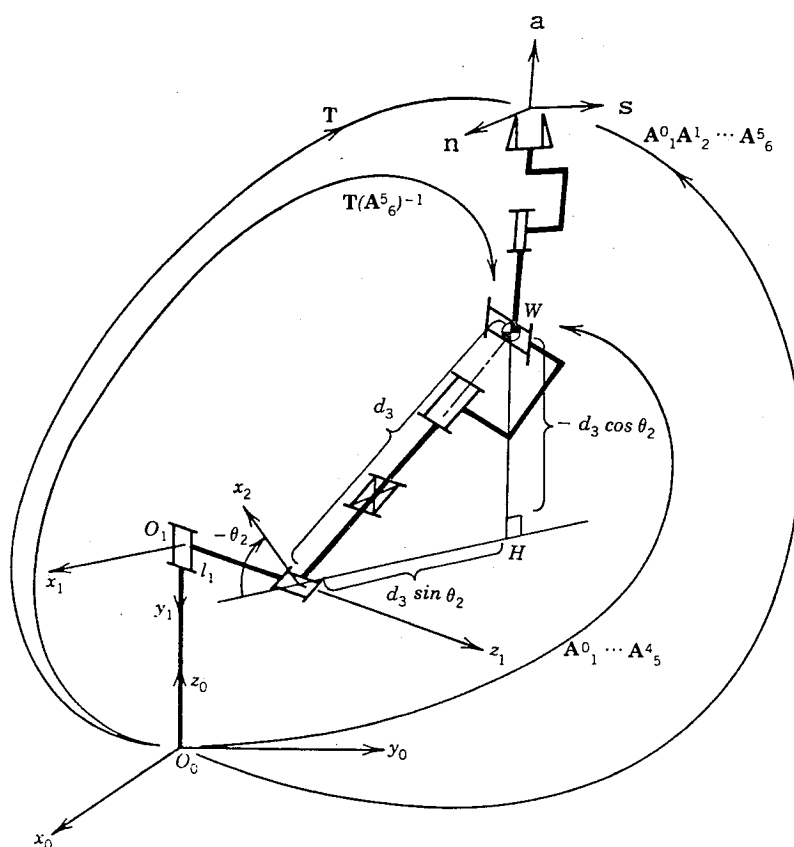


Fig. 4.4

(4.2). Si noti, tuttavia, che la posizione di W in figura dipende solo dai primi tre giunti, ed è del tutto indipendente dagli ultimi tre giunti. Pertanto, se si eguagliano le quarte colonne delle matrici ad ambo i membri della (4.2), si ottiene un insieme di equazioni in sole tre incognite. Una forma ancora più conveniente di equazioni può ottenersi considerando le quarte colonne dell'equazione (4.3). La quarta colonna a secondo membro rappresenta la posizione del punto W rispetto alla terna di coordinate 1 attraverso il meccanismo, come in figura, ed è data semplicemente da

$$\underline{p}_W^1 = \begin{bmatrix} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ l_1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Il primo membro della (4.3) descrive la stessa posizione, raggiunta stavolta attraverso la terna base e l'organo terminale. Pertanto, se si scrivono la posizione e l'orientamento dell'organo terminale T nella forma

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e la si sostituisce a primo membro della (4.3), si ottiene un'espressione alternativa delle coordinate $\underline{p}_W^1$, ovvero

$$\underline{p}_W^1 = \begin{bmatrix} p_x^* c_1 + p_y^* s_1 \\ -p_z^* + l_0 \\ -p_x^* s_1 + p_y^* c_1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

dove p_x^* , p_y^* , p_z^* rappresentano le coordinate del punto W, date da

$$p_x^* = p_x - l_2 a_x$$

$$p_y^* = p_y - l_2 a_y \quad (4.7)$$

$$p_z^* = p_z - l_2 a_z$$

Eguagliando quindi la (4.4) e la (4.7) si ottengono tre equazioni in tre incognite:

$$d_3 s_2 = p_x^* c_1 + p_y^* s_1 \quad (4.8)$$

$$-d_3 c_2 = -p_z^* + l_0 \quad (4.9)$$

$$l_2 = -p_x^* s_1 + p_y^* c_1 \quad (4.10)$$

Per risolvere l'ultima eq., sia

$$t = \tan(\theta_1/2) \quad (4.11)$$

da cui

$$c_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad s_1 = \frac{2t}{1+t^2} \quad (4.12)$$

Sostituendo le (4.12) nella (4.10) si ottiene un'equazione di secondo grado nell'incognita t:

$$(l_1 + p_y^*) t^2 + 2p_x^* t + l_1 - p_y^* = 0 \quad (4.13)$$

Risolvendola in t, tenendo conto della (4.11), si ottiene

$$\theta_1 = 2 \tan^{-1} \left[\frac{-p_x^* \pm \sqrt{p_x^{*2} + p_y^{*2} - l_1^2}}{l_1 + p_y^*} \right] \quad (4.14)$$

Si noti che la quantità sotto radice deve essere ovviamente positiva. Altrimenti non vi è soluzione, il che vuol dire che la posizione dell'organo terminale è al di fuori dello spazio di lavoro raggiungibile del manipolatore.

Dividendo ambo i membri della (4.8) per i membri corrispondenti della (4.9) si ottiene poi

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left[\frac{p_x^* c_1 + p_y^* s_1}{p_z^* - l_0} \right] \quad (4.15)$$

Una volta nota θ_1 dalla (4.14), si può determinare θ_2 con la (4.15). Inoltre, d_3 può ricavarsi quadrando e sommando la (4.8) e la (4.9):

$$d_3 = \pm \sqrt{(p_x^* c_1 + p_y^* s_1)^2 + (p_z^* - l_0)^2} \quad (4.16)$$

Si vogliono discutere ora le soluzioni. Il giunto prismatico mostrato in Fig. 3.7 ha una corsa limitata con d_3 sempre positiva. Pertanto, si deve senz'altro scartare la soluzione negativa nella (4.16). La (4.14), d'altro canto, ha due soluzioni, e due soluzioni avrà anche la (4.15) in corrispondenza di ognuna delle soluzioni ottenute per θ_1 dalla (4.14). La Fig. 4.5 illustra le due configurazioni del manipolatore corrispondenti a tali due soluzioni. Come anticipato, le soluzioni del problema cinematico inverso in generale non sono uniche. Si noti anche che le funzioni arcotangente nelle (4.14) e (4.15) sono definite a meno di 180° . Bisognerà adottare pertanto una funzione inversa definita per i valori del numeratore e del denominatore, in modo da scegliere il quadrante giusto.

Una volta determinate le prime tre variabili di giunto, si passa a risolvere l'equazione cinematica nelle altre tre variabili. Se si moltiplicano a sinistra ambo i membri della (4.1) per l'inversa del prodotto di matrici $A_1^0 A_2^1 A_3^2$, si



80

ottiene

$$[A_1^0(\theta_1)A_2^1(\theta_2)A_3^2(d_3)]^{-1}T = A_4^3(\theta_4)A_5^4(\theta_5)A_6^5(\theta_6) \quad (4.17)$$

Ambo i membri di tale equazione rappresentano la posizione e l'orientamento dell'organo terminale visti nella terna 3. Essendo θ_1 , θ_2 e d_3 ormai noti, la matrice prodotto a primo membro è nota; la si indichi per convenienza con

$$T' = (A_1^0 A_2^1 A_3^2)^{-1} T = \begin{bmatrix} n_{x'} & s_{x'} & a_{x'} & p_{x'} \\ n_{y'} & s_{y'} & a_{y'} & p_{y'} \\ n_{z'} & s_{z'} & a_{z'} & p_{z'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Moltiplicando a sinistra la (4.17) per $[A_4^3(\theta_4)]^{-1}$ e valutando ambo i membri, si ottiene

$$(A_4^3)^{-1} T' = \begin{bmatrix} * & * & a_{x'}c_4 + a_{y'}s_4 & * \\ -n_{z'} & -s_{z'} & -a_{z'} & * \\ -n_{x'}s_4 + n_{y'}c_4 & -s_{x'}s_4 + s_{y'}c_4 & -a_{x'}s_4 + a_{y'}c_4 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$A_5^4 A_6^5 = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & * \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & * \\ s_6 & c_6 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ove alcuni elementi delle matrici sono stati indicati di proposito con un asterisco "*", dal momento che essi sono irrilevanti per il calcolo in corso. Eguagliando gli elementi (3,3) delle matrici sopra, si ottiene

$$-a_{x'}s_4 + a_{y'}c_4 = 0 \quad (4.21)$$

La variabile di giunto θ_4 è data quindi da

$$\theta_4 = \tan^{-1}(a_{y'}/a_{x'}) \quad (4.22)$$

Dall'uguaglianza degli elementi (1,3) e (2,3) si ottiene poi

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left[\frac{a_{x'}c_4 + a_{y'}s_4}{a_{z'}} \right] \quad (4.23)$$

ove c_4 ed s_4 sono noti, una volta noto θ_4 dalla (4.22). In maniera analoga si può determinare θ_6 dagli elementi (3,1) e (3,2), ovvero

$$\theta_6 = \tan^{-1} \left[\frac{-n_{x'}s_4 + n_{y'}c_4}{-s_{x'}s_4 + s_{y'}c_4} \right] \quad (4.24)$$

In definitiva si sono ottenute tutte le sei variabili di giunto.

Nell'ipotesi in cui tutti i giunti possano ruotare di 360° , vi sono due soluzioni possibili per quanto riguarda le ultime tre variabili di giunto. Infatti, poiché nella (4.22) si ha la funzione arcotangente, l'angolo θ_4 può assumere due valori, definiti a meno di 180° . Le due configurazioni corrispondenti alle due soluzioni sono illustrate in Fig. 4.6. Siano $\theta_i(1)$ e $\theta_i(2)$ rispettivamente le prime e seconde soluzioni, con $\theta_i(1) \leq \theta_i(2)$. Tali soluzioni sono legate da

$$\begin{aligned} \theta_4(2) &= \theta_4(1) + \pi \\ \theta_5(2) &= -\theta_5(1) \\ \theta_6(2) &= \theta_6(1) + \pi \end{aligned} \quad (4.25)$$

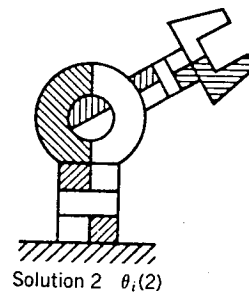
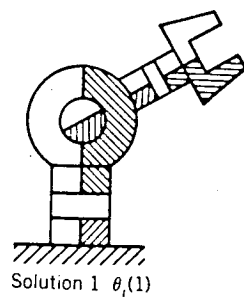


Fig. 4.6

Ricordando gli angoli di Eulero definiti nel § 2.3, si può osservare come gli ultimi tre giunti del manipolatore di Stanford hanno la stessa costruzione degli angoli di Eulero, e si ritrova come tali angoli non siano univocamente determinati per un dato orientamento, come mostrato dalla (4.25).

4.5 Risolubilità

Nel precedente paragrafo si è risolta l'equazione cinematica del manipolatore di Stanford, ottenendo una soluzione in forma chiusa, ovvero le variabili di giunto come funzioni esplicite della posizione e dell'orientamento desiderati dell'organo terminale. Pertanto, una volta assegnati i dati concernenti la posizione e l'orientamento dell'organo terminale, le variabili di giunto possono essere determinate semplicemente valutando tali funzioni per i dati assegnati.

L'esistenza di una soluzione in forma chiusa dipende dalla struttura cinematica del manipolatore. Ad una struttura cinematica per la quale esiste una soluzione in forma chiusa si dà spesso il nome di struttura risolubile. In generale nei robot industriali la struttura cinematica del manipolatore viene progettata in maniera tale che risulti risolubile, ma non è raro il caso della struttura prototipo analizzata nel § 3.4, la quale non è affatto risolubile.

E' un punto importante, quindi, ricercare quali siano le caratteristiche che rendono una struttura cinematica risolubile. Pieper [5] ha dimostrato che condizione sufficiente affinché la struttura cinematica di un manipolatore a sei gradi di libertà sia risolubile è che gli assi di tre giunti di rotazione consecutivi si intersechino in un unico punto per tutte le configurazioni del manipolatore. Si può facilmente verificare che la struttura cinematica del manipolatore di Stanford soddisfa tale condizione, dal momento che gli assi di rotazione degli ultimi tre giunti si intersecano

nello stesso punto W di Fig. 3.7. La struttura prototipo analizzata, invece, non soddisfa tale condizione, poiché gli assi degli ultimi tre giunti si intersecano solo a due a due.

Quando gli assi degli ultimi tre giunti si intersecano in un unico punto, si dice che gli ultimi tre giunti individuano un polso sferico. Pieper [5] elenca tutte le possibili strutture cinematiche di manipolatori a sei gradi di libertà per i quali gli assi di tre giunti di rotazione consecutivi si intersecano in un unico punto, e per ognuna delle strutture viene fornita la corrispondente soluzione analitica in forma chiusa. Allo scopo di fornire una dimostrazione di tale condizione, si riprenda il procedimento di soluzione dell'equazione cinematica del manipolatore di Stanford. In principio si è individuato quel punto W nel quale i tre assi si intersecano. Riscrivendo quindi l'equazione cinematica originaria in modo che ambo i membri rappresentino le coordinate del punto W, si è suddiviso il problema originario di trovare sei incognite in due sottoproblemi a tre incognite ciascuno. Tale suddivisione è stata resa possibile dal fatto che gli assi dei tre giunti consecutivi si intersecano in un unico punto. Per le equazioni a tre incognite che si ottengono, si può dimostrare che esiste una soluzione in forma chiusa. Eguagliando quindi gli elementi corrispondenti dell'equazione matriciale ed operando un opportuno cambio di variabili come in (4.11), si può ridurre l'equazione in un'equazione algebrica al più di ordine quattro, per la quale esistono soluzioni analitiche (equazioni algebriche di ordine maggiore al quarto non sono risolvibili analiticamente), e quindi si può ottenere una soluzione in forma chiusa. Tale procedura per risolvere l'equazione cinematica non è applicabile in generale quando gli assi di tre giunti di rotazione consecutivi non si incontrano in un unico punto. Si noti però che la condizione di risolubilità dettata da Pieper non è necessaria, ma solo sufficiente. Pertanto

possono esistere altre strutture cinematiche che, pur non soddisfacendo tale condizione, siano risolubili.

4.6 Tecniche di soluzione numeriche

Una maniera alternativa di ottenere una soluzione all'equazione cinematica di un manipolatore, per il quale non esista una soluzione in forma chiusa, è quella di ricorrere a metodi numerici fondati su algoritmi iterativi, come ad es. il metodo di Newton-Raphson. Una soluzione completa generalizzata basata su tale strategia può trovarsi in [6]. Il carico computazionale di un metodo iterativo, tuttavia, è piuttosto considerevole, se paragonato a quello di una soluzione in forma chiusa. E' per tale motivo che spesso tali metodi numerici risultano impraticabili o improponibili. Si consideri infatti il caso di un manipolatore al quale si richieda di muovere il suo organo terminale lungo una traiettoria desiderata. Un numero considerevole di dati concernenti punti lungo la traiettoria deve essere trasformato nelle corrispondenti variabili di giunto, richiedendo tempi di calcolo di solito più elevati di quelli desiderati. Tali tempi diventano cruciali se la trasformazione deve essere eseguita in tempo reale. Usualmente, infatti, in uno schema di controllo cinematico si desiderano frequenze di campionamento dell'ordine di 30 Hz o più.

Una tecnica alternativa per il computo di tutte le soluzioni ad un'equazione cinematica è certamente quella proposta in [3], dove si adottano dei metodi di continuazione per la risoluzione di sistemi di otto equazioni di secondo grado in otto incognite, ottenuti eliminando opportunamente alcune delle incognite nell'equazione originaria. Tale metodo, pur presentando il vantaggio di essere applicabile rigorosamente a qualsiasi tipo di struttura cinematica a cinque o sei gradi di libertà, soffre dello stesso inconveniente dei metodi

numerici di cui sopra, ovvero i tempi di calcolo risultano considerevolmente lunghi, rendendone impossibile l'applicazione in tempo reale lungo una traiettoria.

D'altra parte, è bene tener presente che persino per le strutture cinematiche risolubili si sta tentando di adottare strutture di calcolo estremamente veloci, come ad es. quelle che fanno uso dei processori CORDIC ("COordinate Rotation DIgital Computer") [7], e che sfruttano opportuni parallelismi nel computo di tutte le soluzioni, comprese quelle multiple, di un'equazione cinematica risolubile.

4.7 Controllo cinematico in velocità : Singolarità

L'equazione (3.30) del capitolo precedente forniva una relazione lineare tra le velocità ai giunti e la velocità all'organo terminale (lineare + angolare). Si vuole analizzare ora il problema inverso, ovvero, assegnata una velocità desiderata all'organo terminale, si vogliono determinare le velocità ai giunti che comportano il moto dell'organo terminale alla velocità desiderata.

Come già menzionato nel Capitolo 3, un manipolatore deve possedere almeno sei gradi di libertà per collocare l'organo terminale in una posizione ed in un orientamento arbitrari. In maniera simile, sei gradi di libertà sono necessari per muovere l'organo terminale in una direzione arbitraria con una velocità angolare arbitraria. In tale paragrafo si discuterà il problema inverso per manipolatori a sei gradi di libertà, mentre si rimanderà ad un capitolo successivo il caso di manipolatori con un numero di gradi di libertà $n > 6$.

Per un manipolatore a sei gradi di libertà, la matrice Jacobiana J è una matrice quadrata (6×6). Se la matrice è non singolare in corrispondenza della configurazione corrente, si può pensare di invertirla, per ottenere

$$\dot{\underline{q}} = J^{-1} \dot{\underline{x}}$$

(4.26)

L'equazione (4.26) determina le velocità richieste ai singoli giunti $\dot{\underline{q}}$ per ottenere una velocità assegnata all'organo terminale $\dot{\underline{x}}$ - tale schema di inversione prende il nome di controllo cinematico in velocità o controllo Jacobiano, ed è da attribuire a Whitney [8]. Dal momento che lo Jacobiano varia al variare della configurazione del manipolatore, esso può risultare singolare in alcune configurazioni. In tali casi l'inversa dello Jacobiano non esiste, e la soluzione (4.26) non è valida. In una configurazione singolare, la matrice J non è di pieno rango, il che significa che i suoi vettori colonna risultano linearmente dipendenti, e non descrivono tutto lo spazio a sei dimensioni del vettore $\dot{\underline{x}}$. Pertanto, esiste almeno una direzione nella quale l'organo terminale non può essere spostato, ciò indipendentemente dal modo in cui si scelgono le velocità $\dot{\underline{q}}$.

Senza voler dare una classificazione rigorosa delle singularità, si può pensare di suddividerle in due categorie:

1. Singularità al confine dello spazio di lavoro sono quelle che occorrono quando il manipolatore è tutto esteso o ripiegato su sé stesso, in maniera tale che l'organo terminale si trova al confine dello spazio di lavoro.
2. Singularità interne allo spazio di lavoro sono quelle che occorrono all'interno dello spazio di lavoro e sono generalmente provocate dall'allineamento di due o più giunti.

Per comprendere meglio la prima di tali eventualità si consideri il seguente esempio [4].

Sia dato il manipolatore planare a due gradi di libertà in Fig. 4.7. Si supponga per semplicità che i bracci siano

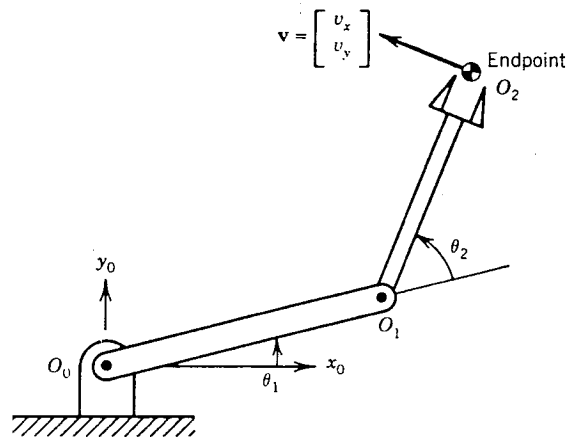


Fig. 4.7

di lunghezza unitaria, e si denoti con $\underline{v} = (v_x \ v_y)^T$ la velocità del punto terminale. Si vogliono risolvere i seguenti problemi:

1. Assegnata una velocità desiderata del punto terminale, trovare le velocità ai giunti che comportano tale velocità.
2. Trovare le configurazioni singolari, e determinare per ogni configurazione in quale direzione non può spostarsi il punto terminale.
3. Trovare i profili delle velocità ai giunti quando al punto terminale si richiede di inseguire la traiettoria mostrata in Fig. 4.8 a velocità tangenziale costante.

1. La matrice Jacobiana per tale manipolatore planare è stata già derivata nella (3.19). Per lunghezze l_1 ed l_2 unitarie si ha

$$J = \begin{bmatrix} -s_1 - s_{12} & -s_{12} \\ c_1 + c_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Se si inverte lo Jacobiano e lo si sostituisce nella (4.26), si trova che le velocità ai giunti sono date da

$$\dot{\theta}_1 = \frac{v_x c_{12} + v_y s_{12}}{s_2} \quad (4.28)$$

$$\dot{\theta}_2 = - \frac{v_x (c_1 + c_{12}) + v_y (s_1 + s_{12})}{s_2} \quad (4.29)$$

2. Si avranno singolarità allorché il determinante dello Jacobiano del manipolatore è nullo. Dalla (4.27) risulta

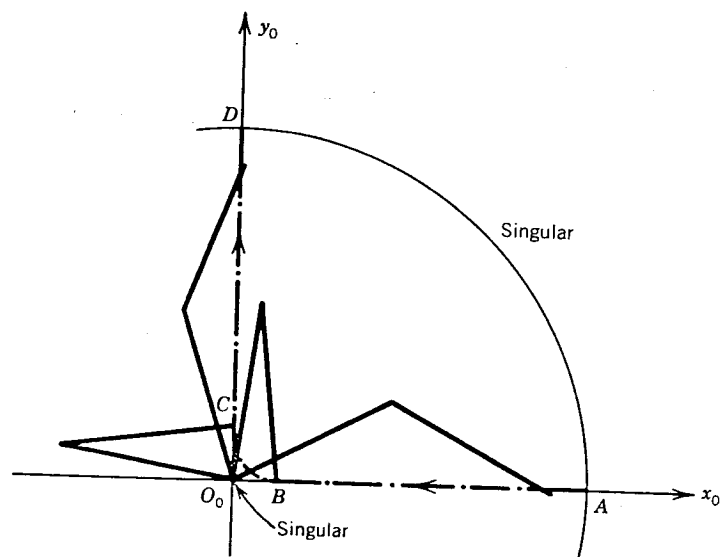


Fig. 4.8

$$\det(J) = s_2 \quad (4.30)$$

Pertanto, le singularità si avranno per $\theta_2 = 0$ o $\theta_2 = \pi$, ovvero quando il manipolatore è tutto contratto o tutto esteso. In tali situazioni la posizione del punto terminale è illustrata in Fig. 4.8, dove l'origine O_0 ed il confine dello spazio di lavoro raggiungibile risultano singolari. Nelle configurazioni singolari, l'equazione (3.21) diventa

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s_1 \\ 2c_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \end{bmatrix} (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (4.31)$$

ovvero i due vettori colonna dello Jacobiano risultano paralleli. Questo significa che il punto terminale può essere spostato solo nella direzione perpendicolare ai bracci del manipolatore, ed in nessuna altra direzione.

3. Per trovare il profilo di velocità necessario ad inseguire la traiettoria specificata, si procede prima col ricavare gli angoli di giunto corrispondenti ad ogni posizione sulla traiettoria. Quindi si sostituiscono tali valori nelle (4.28) e (4.29), determinando così le velocità richieste. I profili di velocità che si ottengono sono diagrammati in Fig. 4.9. Si noti che entrambi le velocità aumentano sensibilmente in prossimità dei punti singolari A e D, il che indica che per generare una velocità del punto terminale nelle direzioni radiali OA e OD, sono necessarie velocità elevate ad entrambi i giunti. In tale regione, infatti, i denominatori delle equazioni (4.28) e (4.29) sono pressoché nulli. In aggiunta, la velocità del primo giunto aumenta sensibilmente tra i punti B e C, e ciò in ragione del fatto che i bracci del manipolatore devono ruotare rapidamente in tale regione. Ancora, tale regione è nell'intorno di un punto singolare. Pertanto, anche se l'inversa dello Jacobiano del manipolatore esiste, le velocità ai giunti diventano estremamente elevate nell'intorno di punti singolari.

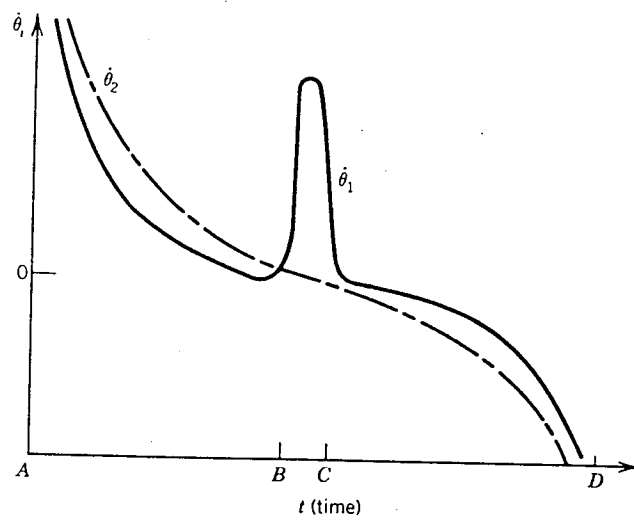


Fig. 4.9

Bibliografia

- [1] J.J. Craig, Introduction to Robotics: Mechanics & Control, Addison-Wesley, 1986.
- [2] B. Roth, J. Rastegar and V. Scheinman, "On the design of computer controlled manipulators," 1st CISM-IFTOMM Ro.Man.Sy, Udine, Italy, Sept. 1973.
- [3] L.-W. Tsai and A.P. Morgan, "Solving the kinematics of the most general six- and five-degree of freedom manipulators by continuation methods," ASME J. Mech., Transm., Autom. in Design, 107, June 1985.
- [4] H. Asada and J.-J.E. Slotine, Robot Analysis and Control, Wiley, 1986.
- [5] D. Pieper, "The kinematics of manipulators under computer control," Ph.D. Thesis, Stanford University, 1968.
- [6] A.A. Goldenberg, B. Benhabib and R.G. Fenton, "A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots," IEEE J. Rob., Autom., 1, 1, March 1985.
- [7] C.S.G. Lee and P.R. Chang, "VLSI architecture for inverse kinematics computation," 1986 ACC, Seattle, WA, June 1986.
- [8] D.E. Whitney, "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses," IEEE Trans. Man-Mach. Syst., 10, 2, June 1969.

5. UN ALGORITMO GENERALE DI SOLUZIONE

5.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti si è formulato il problema cinematico inverso di un manipolatore, caratterizzandone dapprima le soluzioni analitiche ottenibili in forma chiusa, e quindi fornendo dei cenni su alcune tecniche di soluzione numeriche applicabili nel caso in cui la struttura cinematica non sia risolubile.

In tale capitolo verrà presentata una nuova tecnica di soluzione del problema cinematico inverso, ottenuta dalla riformulazione del problema cinematico inverso in termini dinamici. L'algoritmo risultante è del tutto generale ed è perciò applicabile a qualsiasi tipo di struttura cinematica [1-2]. Ciononostante, si vedrà nel capitolo successivo come la particolarizzazione dello stesso algoritmo per tre diverse strutture cinematiche, in relazione alla configurazione degli ultimi tre assi di rotazione, consente di ottenere degli algoritmi ancora più efficienti dal punto di vista computazionale.

5.2 L'algoritmo generale di soluzione

Si è già opportunamente messo in evidenza come il problema cinematico inverso sia di importanza fondamentale nel controllo di manipolatori. Di fatto, le azioni di controllo sono esplicate nello spazio dei giunti, caratterizzato dal vettore $(n \times 1)$ $\underline{q}$ delle variabili di giunto. Il moto dell'organo terminale, invece, è specificato naturalmente nello spazio Cartesiano a mezzo di un vettore $(m \times 1)$ $\underline{x}$ caratterizzante la posizione e l'orientamento dell'organo terminale. L'equazione cinematica di un manipolatore può quindi

essere riscritta in maniera sintetica come

$$\underline{x} = \underline{f}(\underline{q}) \quad (5.1)$$

ove $\underline{f}$ è una funzione vettoriale ($m \times 1$) continua, nonlineare, la cui struttura ed i cui parametri sono noti. Essa è univocamente determinata, mentre la sua inversa, definita come

$$\underline{q} = \underline{f}^{-1}(\underline{x}) \quad (5.2)$$

non è univocamente determinata e non è facilmente esprimibile analiticamente.

Nel seguito si vuole risolvere il problema cinematico inverso, costruendo un sistema dinamico il cui ingresso sia la traiettoria desiderata dell'organo terminale da inseguire nello spazio Cartesiano, e le cui uscite siano le traiettorie corrispondenti ai giunti che permettono di inseguire tale traiettoria [1,2]. La caratteristica fondamentale dell'algoritmo risultante è senz'altro il fatto che esso è basato sul calcolo della sola funzione cinematica diretta (5.1).

Pertanto, sia $\underline{\hat{q}}(t)$ una soluzione della (5.1) relativa ad una traiettoria desiderata $\underline{\hat{x}}(t)$. Sia poi $\underline{q}(t)$ la configurazione corrente dei giunti del manipolatore, ed $\underline{x}(t)$ la corrispondente configurazione dell'organo terminale. Si può pensare di indicare con

$$\underline{e}(t) = \underline{\hat{x}}(t) - \underline{x}(t) \quad (5.3)$$

il vettore errore nello spazio Cartesiano. Si può affermare che l'obiettivo di un algoritmo di inversione cinematica è quello di assicurare la convergenza a zero di $\underline{e}(t)$, e conseguentemente la convergenza di $\underline{q}(t)$ a $\underline{\hat{q}}(t)$, che è la soluzione cercata della (5.1) in corrispondenza della traiettoria

desiderata $\hat{\underline{x}}(t)$. A tale scopo, tenendo conto dello Jacobiano del manipolatore definito nella (3.30), si ha che la dinamica dell'errore, ottenuta derivando rispetto al tempo la (5.3), può scriversi anche come

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{\hat{x}}} - J(\underline{q})\dot{\underline{q}} \quad (5.4)$$

ove si è omessa la dipendenza temporale, e si è evidenziata la dipendenza dello Jacobiano dalla configurazione corrente ai giunti. Si vuole dimostrare che il sistema dinamico di Fig. 5.1 assicura la convergenza a zero dell'errore $\underline{e}$. La dimostrazione è basata sul metodo diretto di Lyapunov per l'analisi della stabilità di sistemi nonlineari. Sia quindi

$$v = \frac{1}{2} \underline{e}^T \underline{e} \quad (5.5)$$

una funzione di Lyapunov definita positiva associata all'errore $\underline{e}$. Differenziando la (5.5) rispetto al tempo, e tenendo conto della (5.4), si ottiene

$$\dot{v} = \underline{e}^T \dot{\underline{\hat{x}}} - \underline{e}^T J \dot{\underline{q}} \quad (5.6)$$

Il controllo $\dot{\underline{q}}$ deve essere scelto in maniera tale da rendere la $\dot{v}$ definita negativa. Una scelta possibile, pertanto, è la seguente:

$$\dot{\underline{q}} = \gamma J^T \underline{e} \quad (5.7)$$

ove

$$\gamma = \alpha + (\underline{e}^T \dot{\underline{\hat{x}}}) (\underline{e}^T J J^T \underline{e})^{-1}, \quad \alpha > 0 \quad (5.8)$$

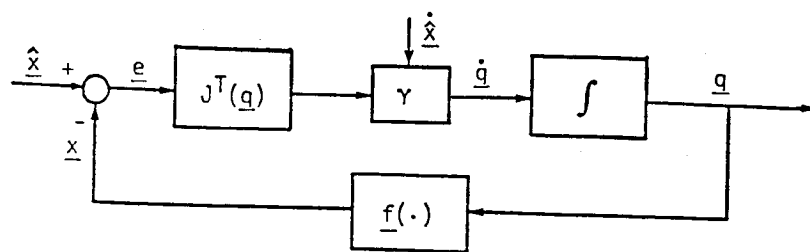


Fig. 5.1

5.3 Caratteristiche dell'algoritmo di soluzione

Lo schema di controllo a cui si perviene è quello illustrato in Fig. 5.1. La velocità di convergenza e la precisione ottenibili per un dato tempo di assestamento, quando $\underline{e}(0) \neq \underline{0}$, sono direttamente proporzionali alla costante di guadagno α .

E' da sottolineare che $\dot{\underline{v}} = 0$ allorché $\dot{\underline{q}} = \underline{0}$; in tale caso si ha che $\underline{e} \in N(J^T)$. Tuttavia, osservando che $N(J^T)$ è solo in quella direzione in cui una forza nello spazio Cartesiano applicata all'organo terminale viene completamente neutralizzata dai vincoli meccanici del manipolatore, è ragionevole assumere che la traiettoria sia programmata in maniera consistente con i vincoli meccanici. Pertanto, dal punto di vista implementativo, si può affermare che risulta sempre $J^T \underline{e} \neq \underline{0}$, quando $\underline{e} \neq \underline{0}$.

Se invece l'algoritmo parte con le stesse condizioni iniziali, $\underline{q}(0) = \hat{\underline{q}}(0)$, il controllo (5.8) garantirà un errore $\underline{e}$ di inseguimento nullo lungo l'intera traiettoria, evitando così anche il problema legato all'eventualità di avere soluzioni multiple, descritto nel § 4.3. Le configurazioni ai giunti lungo la traiettoria, infatti, risulteranno adiacenti l'un l'altra; ovviamente in caso di soluzioni multiple la scelta avverrà automaticamente in dipendenza delle condizioni iniziali e della configurazione precedente.

Come anticipato, uno dei vantaggi conseguibili con l'adottare tale algoritmo per risolvere il problema cinematico inverso lungo una traiettoria sta nel fatto che l'algoritmo è basato sul computo di sole funzioni cinematiche dirette, come la $\underline{f}$ e la J . Nondimeno, dalla Fig. 5.1 emerge chiaramente che l'algoritmo genera naturalmente, senza alcuno sforzo computazionale aggiuntivo, anche le velocità ai giunti $\dot{\underline{q}}$. Ciò rende tale algoritmo molto efficace per quel che riguarda il suo utilizzo in uno schema di controllo nello spazio dei giunti che preveda la conoscenza delle velocità

di riferimento ai giunti [1].

Tuttavia, proprio in virtù del fatto che, per condizioni iniziali nulle, $\underline{e}(0) = \underline{0}$, il controllo (5.8) garantisce un errore di inseguimento nullo, si ha che, nell'intorno dell'origine dello spazio di errore, si introduce un guadagno equivalente, dipendente dalle variabili di stato dell'algoritmo, che tende all'infinito. Ciò comporta la generazione di velocità ai giunti $\dot{\underline{q}}$ ad elevato contenuto frequenziale; tale effetto non si riflette sulle variabili di giunto $\underline{q}$, a causa della natura filtrante degli integratori. Pertanto, nel caso in cui sia richiesto determinare anche le traiettorie in velocità ai giunti, è opportuno filtrare le velocità $\dot{\underline{q}}$ generate dall'algoritmo. L'alternativa è quella di ammettere errori di inseguimento finiti, ricorrendo alla legge di controllo puramente proporzionale del tipo

$$\dot{\underline{q}} = \alpha \mathbf{J}^T \underline{e} \quad (5.9)$$

In virtù di tale scelta, la $\dot{\underline{v}}$ risulta definita negativa solo all'esterno di una regione nello spazio di stato dell'errore contenente l'origine $\underline{e} = \underline{0}$; tale regione risulta attrattiva per tutte le traiettorie. Naturalmente, gli errori di inseguimento massimi dipenderanno direttamente da $\|\dot{\underline{x}}\|$, ed inversamente da α ; è da sottolineare, tuttavia, che a regime $\dot{\underline{x}} = \underline{0}$, ovvero anche nel caso in cui si sia interessati a risolvere il problema cinematico inverso per una configurazione dell'organo terminale costante, l'errore risulterà identicamente nullo, in virtù della struttura a ciclo chiuso del sistema di Fig. 5.1.

Lo schema di controllo (5.9) è sostanzialmente analogo a quello proposto di recente in [3] per l'inversione cinematica con una configurazione desiderata dell'organo terminale costante ($\dot{\underline{x}} = \underline{0}$). Più specificamente, in [3] si propone di utilizzare una legge di controllo del tipo

$$\dot{\underline{q}} = J^T K \underline{e} \quad (5.10)$$

dove K è una matrice definita positiva, non necessariamente simmetrica. Con la (5.10) si ottiene

$$\dot{v} = -\dot{\underline{q}}^T \dot{\underline{q}} \leq 0 \quad (5.11)$$

Inoltre si osserva come l'aggiunta di una matrice tempo-variante antisimmetrica $K_A(t)$ alla K , consente di ruotare la matrice K al di fuori dello spazio nullo di J^T , lasciando la v inalterata. Così procedendo si può evitare che, nel caso in cui $K \underline{e}$ appartenga al nullo di J^T e J sia singolare nella configurazione corrente, l'errore si 'blocchi' su un valore diverso da zero. Tale tecnica, tuttavia, non risulta applicabile in pratica se la traiettoria desiderata dell'organo terminale varia nel tempo.

Un'altra caratteristica dell'algoritmo da non sottovalutare è quella che, poiché non si richiede l'inversione dello Jacobiano, si possono ottenere soluzioni anche in caso di singolarità, a condizione però di programmare correttamente la traiettoria desiderata dell'organo terminale. Più specificamente, come si è già visto nell'esempio del § 4.7, non sorgerà alcun problema se la singolarità apparterrà alla traiettoria, laddove nel caso di una traiettoria passante in prossimità della singolarità, come quella dell'esempio su citato, si hanno inevitabilmente velocità ai giunti elevate e la convergenza dell'algoritmo viene notevolmente rallentata.

Infine, un algoritmo di inversione cinematica alternativo può ottenersi con la seguente legge di controllo [1],

$$\dot{\underline{q}} = J^{-1} (M \underline{e} + \dot{\underline{x}}) \quad (5.12)$$

ove M è una matrice definita positiva i cui autovalori determinano la velocità di convergenza a zero dell'errore $\underline{e}$.

Anche nel caso in cui lo Jacobiano risulti singolare, si può pensare di adottare un opportuno Jacobiano ridotto. La (5.12) ricorda una soluzione simile al controllo del manipolatore direttamente nello spazio Cartesiano [4]; è da sottolineare, tuttavia, che lo scopo principale di tale controllo è quello di applicare un controllo dinamico direttamente nello spazio Cartesiano, e non quello di risolvere esplicitamente il problema cinematico inverso, per poi sintetizzare un controllo nello spazio dei giunti.

5.4 Caratterizzazione cinematica dell'algoritmo

Nel derivare l'algoritmo di soluzione del problema cinematico inverso nei precedenti paragrafi, non si è fatta alcuna ipotesi sulla struttura cinematica del manipolatore, nel senso che l'algoritmo è potenzialmente applicabile per l'inversione cinematica di qualsiasi struttura, ad esempio anche ad una struttura ridondante in cui il numero di gradi di libertà sia maggiore del numero di variabili necessarie a specificare completamente la posizione e l'orientamento desiderati dell'organo terminale. D'altro canto, l'algoritmo sopra ricavato può essere anche concepito per risolvere un qualsiasi insieme di m equazioni algebriche nonlineari in n incognite [2].

In tale paragrafo si vuole dare una caratterizzazione cinematica dell'algoritmo più corretta dal punto di vista della definizione dell'orientamento dell'organo terminale del manipolatore. Nel capitolo successivo, quindi, si analizzeranno esplicitamente tre strutture cinematiche diverse nella struttura dell'organo terminale, per poi trattare infine le strutture cinematiche ridondanti.

Se si fa riferimento a manipolatori a sei gradi di libertà, col vettore ($m \times 1$) $\underline{x}$ si è denotato un vettore che specifica la posizione e l'orientamento dell'organo

terminale. Ciononostante, se si analizza più accuratamente la struttura dell'algoritmo, ci si accorge che, nei riguardi dell'orientamento, non è pensabile adottare la descrizione convenzionale in termini degli angoli di Eulero del § 2.3. La ragione è insita nel fatto che non esiste un legame cinematico diretto tra le variabili di giunto e gli angoli di Eulero. Di conseguenza il computo della funzione cinematica f definita nella (5.1) richiederebbe l'utilizzo delle formule di inversione, come per gli ultimi tre angoli di giunto del manipolatore di Stanford nel § 4.4, con lo svantaggio poi di avere soluzioni multiple. Tale eventualità non si sposa con la caratteristica cardine dell'algoritmo, che è proprio quella di evitare il computo di funzioni cinematiche inverse, che richiedono tempi di calcolo maggiori e non sono definite univocamente.

La soluzione corretta per la specifica dell'orientamento dell'organo terminale, invece, è suggerita dalla rappresentazione alternativa della parte dello Jacobiano, relativa appunto all'orientamento, in termini della terna di versori $\underline{s}$, $\underline{a}$, $\underline{n}$, così come introdotta nel § 3.7. Si intuisce infatti che, per una data configurazione delle variabili di giunto, il computo di tali versori può avvenire in maniera diretta, una volta nota l'espressione della matrice di trasformazione T , scritta come nella (4.5). D'altra parte, se l'orientamento desiderato dell'organo terminale viene assegnato in termini degli angoli di Eulero, è immediato conoscere i valori desiderati dei versori $\underline{s}$, $\underline{a}$, $\underline{n}$ dall'espressione della matrice di rotazione relativa agli angoli di Eulero (2.18). Di conseguenza il vettore $\underline{x}$ nella (5.1) è da intendersi formato dal vettore (9 x 1)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{s} \\ \underline{a} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Si osserva come non sia necessario specificare $\underline{n}$, poiché una volta dati $\underline{s}$ ed $\underline{a}$, risulta $\underline{n} = \underline{s} \times \underline{a}$. Tuttavia, come già osservato nel § 3.7, se si specifica lo Jacobiano in termini di J_s e J_a , bisogna tener conto dei vincoli cinematici da soddisfare (3.49) e (3.53) e, eventualmente, delle proprietà cinematiche che scaturiscono da tali vincoli, discusse nel su citato paragrafo. Nel capitolo successivo si vedrà come tali vincoli vengano adeguatamente portati in conto nella derivazione degli algoritmi di inversione cinematica per le diverse strutture considerate.

Bibliografia

- [1] A. Balestrino, G. De Maria and L. Sciavicco, "Robust control of robotic manipulators," 9th IFAC World Cong., Budapest, Hungary, July 1984.
- [2] W.A. Wolovich and H. Elliott, "A computational technique for inverse kinematics," 23rd IEEE CDC, Las Vegas, NV, Dec. 1984.
- [3] H. Asada and J.-J.E. Slotine, Robot Analysis and Control, Wiley, 1986.
- [4] J.J. Craig, Introduction to Robotics: Mechanics and Control, Addison-Wesley, 1986.

6. L'ALGORITMO PER DIFFERENTI STRUTTURE CINEMATICHE

6.1 Introduzione

Nel precedente capitolo si è descritto l'algoritmo generale di soluzione del problema cinematico inverso per un generico manipolatore di cui non si debba necessariamente precisare la struttura cinematica, ottenuto con una riformulazione dinamica dello stesso problema. Si sono poi evidenziate le caratteristiche di tale algoritmo in relazione all'inversione cinematica lungo una traiettoria desiderata assegnata all'organo terminale. Nel § 5.4, tuttavia, si è messo in luce come, pur prescindendo dalla particolare struttura cinematica, sia opportuno definire l'orientamento dell'organo terminale in termini della terna di versori associata all'ultimo braccio del manipolatore.

Obiettivo del presente capitolo è quello di particularizzare l'algoritmo per tre differenti strutture cinematiche, per quel che riguarda gli ultimi tre assi di moto ai giunti. In tal modo si partizionerà l'algoritmo in due stadi, il primo relativo al posizionamento di un punto opportuno lungo la struttura, ed il secondo relativo all'orientamento dei bracci situati a valle di tale punto. Il vantaggio che ne deriva è sostanzialmente da valutare in termini computazionali, restando il fatto che, una volta definito l'orientamento in maniera opportuna, l'algoritmo generale del precedente capitolo è comunque funzionale allo scopo.

6.2 Configurazione degli assi di rotazione terminali

Si è ripetutamente detto che allo scopo di localizzare la posizione e l'orientamento dell'organo terminale del

manipolatore, sono necessari sei gradi di libertà, e quindi sei giunti. La struttura cinematica tipica di un manipolatore a sei gradi di libertà prevede che i tre giunti terminali siano tutti di rotazione; li si indichino quindi come $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$. Per quel che riguarda i primi tre giunti, invece, essi possono essere tutti di rotazione, come nel robot PUMA 560 [1], o due di rotazione ed uno prismatico, come nel manipolatore di Stanford [2] o in quello prototipo [3], entrambi analizzati in precedenza. Si indichino quindi generalmente come (q_1, q_2, q_3) le tre variabili associate ai primi tre giunti.

Così come evidenziato nel Capitolo 3, gli elementi caratterizzanti la struttura cinematica di un manipolatore, sono i parametri caratteristici di Denavit-Hartenberg [4]. In particolare, con riferimento agli ultimi tre assi di rotazione, sono proprio i valori delle lunghezze a_4 e a_5 e della distanza d_5 a differenziare una struttura da un'altra. Si è già sottolineato nel § 3.4 che per il manipolatore di Stanford gli ultimi tre assi di rotazione concorrono nello stesso punto, laddove per il manipolatore prototipo essi si intersecano solamente a due a due. Le due configurazioni, unitamente ad una terza concernente il caso in cui i tre assi non si incontrano affatto, sono illustrate in Fig. 6.1. In particolare il caso (a) è di particolare interesse, poiché consente di disaccoppiare la posizione dell'organo terminale dal suo orientamento, il che si presenta molto vantaggioso allo scopo della sintesi del controllo. I casi (b) e (c) sono meno comuni in strutture cinematiche tipiche, ma non per questo non riservano un notevole interesse dal punto di vista cinematico, soprattutto per quel che concerne la risolubilità della struttura.

Orbene, le tre strutture tipiche di Fig. 6.1 possono venire convenientemente caratterizzate attraverso i seguenti vincoli sui parametri cinematici a_4 , a_5 e d_5 :

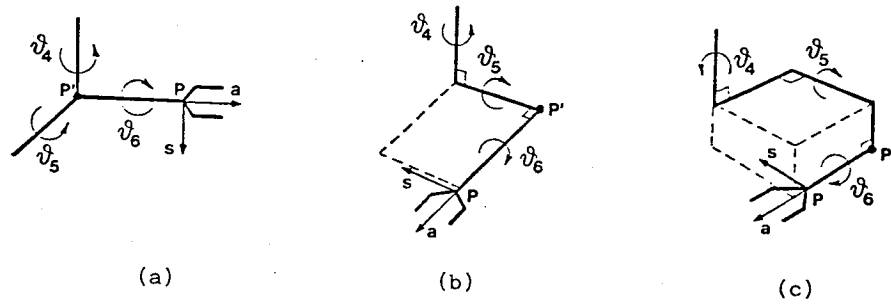


Fig. 6.1

$$a) \text{ assi concorrenti: } a_4 = a_5 = d_5 = 0 \quad (6.1)$$

$$b) \text{ assi che si int. a due a due: } a_4 = a_5 = 0, d_5 \neq 0 \quad (6.2)$$

$$c) \text{ assi sghembi: } a_4 \neq 0, \quad a_5 \neq 0 \quad (6.3)$$

Di conseguenza, dalla conoscenza dei parametri cinematici caratteristici, si può classificare una struttura cinematica in termini delle tre configurazioni di Fig. 6.1.

A tal punto, alla luce delle considerazioni fatte nel § 5.4 sulla specifica del vettore $\underline{x}$, dato dalla (5.13), l'equazione cinematica (5.1) può essere riscritta come

$$\underline{p} = \underline{f}_p(\underline{q}) \quad \underline{s} = \underline{f}_s(\underline{q}) \quad \underline{a} = \underline{f}_a(\underline{q}) \quad (6.4)$$

ove $\underline{q}^T = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6)$ è il vettore delle variabili di giunto, ed $\underline{f}_p$, $\underline{f}_s$, $\underline{f}_a$ sono funzioni vettoriali nonlineari univocamente determinate.

Con riferimento alla Fig. 6.1, si nota che il vettore posizione $\underline{p}$ ed il versore $\underline{a}$ risultano sempre indipendenti dall'ultima rotazione θ_6 . Poiché risulta

$$\underline{p}' = \underline{p} - d_6 \underline{a} \quad (6.5)$$

il vettore $\underline{p}'$ può essere assunto come il vettore che identifica completamente la posizione dell'organo terminale. Inoltre, in dipendenza della particolare struttura cinematica, risulta che tale vettore posizione $\underline{p}'$ dipende da:

- a) le prime tre variabili di giunto (q_1, q_2, q_3) ,
- b) le prime quattro variabili di giunto $(q_1, q_2, q_3, \theta_4)$,
- c) le prime cinque variabili di giunto $(q_1, q_2, q_3, \theta_4, \theta_5)$,

rispettivamente nei tre casi di Fig. 6.1. Nel primo caso, come già evidenziato nel § 4.5 a proposito della risolubilità di una struttura, si parla di polso sferico. Nel secondo caso si hanno disponibili quattro gradi di libertà per posizionare il vettore $\underline{p}'$, poiché anche θ_4 concorre alla sua determinazione; si avranno quindi ∞^1 valori di q_1, q_2, q_3, θ_4 , a meno di non aggiungere un vincolo per ottenere una soluzione unica. Nell'ultimo caso si hanno cinque gradi di libertà a disposizione per posizionare $\underline{p}'$, e quindi ∞^2 valori di $q_1, q_2, q_3, \theta_4, \theta_5$, a meno di non aggiungere due vincoli al problema.

Sulla base di tali considerazioni, ne consegue che il problema cinematico inverso può essere convenientemente decomposto in due stadi [5]; in particolare percorrendo la struttura cinematica all'indietro dal punto P verso la base, risulta opportuno partizionare il problema in quel punto P', la cui posizione dipende così da un numero ridotto di variabili di giunto, e la cui stessa posizione può esprimersi in funzione delle variabili Cartesiane relative alla traiettoria desiderata. In corrispondenza, il vettore $\underline{q}$ può partizionarsi come

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{q}_p \\ \text{---} \\ \underline{q}_h \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

ove, a seconda dei tre casi di Fig. 6.1, risulta

$$a) \quad \underline{q}_p \in R^3, \quad \underline{q}_h \in R^3 \quad (6.7)$$

$$b) \quad \underline{q}_p \in R^4, \quad \underline{q}_h \in R^2 \quad (6.8)$$

$$c) \quad \underline{q}_p \in R^5, \quad \underline{q}_h \in R \quad (6.9)$$

Tale approccio al problema è più efficiente

dell'approccio generale illustrato nel capitolo precedente, poiché riflette meglio quella che è la struttura cinematica del manipolatore, evidenziando le variabili di giunto che determinano la posizione dell'organo terminale del manipolatore da quelle che, una volta determinate le precedenti, ne determinano il suo orientamento. Nondimeno, il partizionare il problema in due stadi, oltre ad essere vantaggioso dal punto di vista computazionale, risulta attraente per gli scopi del controllo nello spazio dei giunti. Nei paragrafi che seguono, quindi, si presenterà l'algoritmo di inversione cinematica per le tre strutture di Fig. 6.1, caratterizzando i vincoli cinematici da imporre alle strutture (b) e (c) in modo da posizionare il punto P' in maniera univoca.

6.3 Polso sferico

Per una struttura cinematica del tipo di quella in Fig. 6.1a, l'equazione cinematica caratteristica (6.4) risulta, tenendo conto della partizione (6.7)

$$\underline{p}' = \underline{f}_p(\underline{q}_p) \quad (6.10)$$

ove $\underline{q}_p^T = (q_1 \ q_2 \ q_3)$, relativamente al primo stadio, e quindi al posizionamento dell'organo terminale del manipolatore. Per il secondo stadio, si ha invece

$$\underline{s} = \underline{f}_s(\underline{q}) \quad \underline{a} = \underline{f}_a(\underline{q}_p, \theta_4, \theta_5) \quad (6.11)$$

che caratterizzano l'orientamento dell'organo terminale.

Dal momento che nella derivazione dell'algoritmo di inversione cinematica è richiesta la conoscenza dello Jacobiano, bisogna particolarizzare al caso di tale struttura la relazione che lega le velocità ai giunti alle velocità all'organo terminale data dalla (3.30), ovvero

$$\dot{\underline{p}}' = J_p(\underline{q}_p) \dot{\underline{q}}_p \quad (6.12)$$

ove J_p è la matrice Jacobiana (3×3) $\partial \underline{f}_p / \partial \underline{q}_p$ che mette in relazione le velocità dei primi tre giunti $\dot{\underline{q}}_p$ alla velocità del vettore posizione dell'organo terminale. Risulta poi anche

$$\dot{\underline{s}} = J_{sp}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}_p + J_s(\underline{q}) \dot{\underline{q}}_h \quad (6.13)$$

$$\dot{\underline{a}} = J_{ap}(\underline{q}) \dot{\underline{q}}_p + J_a(\underline{q}) \dot{\underline{q}}_h$$

ove J_{sp} e J_{ap} sono rispettivamente le matrici Jacobiane (3×3) $\partial \underline{f}_s / \partial \underline{q}_p$ e $\partial \underline{f}_a / \partial \underline{q}_p$ che legano i contributi delle velocità $\dot{\underline{q}}_p$ alle velocità dei versori $\underline{s}$ ed $\underline{a}$, mentre J_s e J_a sono rispettivamente le matrici Jacobiane (3×3) $\partial \underline{f}_s / \partial \underline{q}_h$ e $\partial \underline{f}_a / \partial \underline{q}_h$ che legano i contributi delle velocità degli ultimi tre giunti $\dot{\underline{q}}_h$ alle velocità dei versori $\underline{s}$ ed $\underline{a}$.

Entrando ora nel dettaglio dell'algoritmo di inversione cinematica [6], si ha che, in virtù di tali equazioni, l'equazione della dinamica dell'errore (5.4) può essere scritta come

$$\dot{\underline{e}}_p = \dot{\underline{p}}' - J_p \dot{\underline{q}}_p \quad (6.14)$$

per quel che riguarda il primo stadio, e

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{e}}_s \\ \dot{\underline{e}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{s}} \\ \dot{\underline{a}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{sp} \\ J_{ap} \end{bmatrix} \dot{\underline{q}}_p - \begin{bmatrix} J_s \\ J_a \end{bmatrix} \dot{\underline{q}}_h \quad (6.15)$$

per quel che concerne il secondo.

Orbene, se si definisce una funzione di Lyapunov definita positiva

$$v_p = \frac{1}{2} e_{p-p}^T e_{p-p} \quad (6.16)$$

si ottiene la seguente espressione del controllo $\dot{\underline{q}}_p$,

$$\dot{\underline{q}}_p = \gamma_p J_{p-p}^T e_{p-p} \quad (6.17)$$

ove

$$\gamma_p = \alpha_p + \frac{e_{p-p}^T \dot{\underline{p}}}{e_{p-p}^T J_{p-p} J_{p-p}^T e_{p-p}}, \quad \alpha_p > 0 \quad (6.18)$$

Lo schema di controllo risultante del primo stadio è illustrato in Fig. 6.2. Valgono ovviamente considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte nel § 5.3. In particolare, la legge di controllo puramente proporzionale risulta

$$\dot{\underline{q}}_p = \alpha_p J_{p-p}^T e_{p-p} \quad (6.19)$$

la quale consente di ottenere anche i profili di velocità dei giunti, a condizione di ammettere un errore di inseguimento finito.

Per ciò che riguarda invece il secondo stadio, la derivazione dell'algoritmo è leggermente diversa da quella generale illustrata nel § 5.2, poiché, nel definire l'orientamento dell'organo terminale del manipolatore in termini dei versori $\underline{s}$ ed $\underline{a}$, bisogna innanzitutto tener conto dei vincoli cinematici sugli Jacobiani J_s e J_a dati dalle (3.49) e (3.53). Più specificamente, si scelga una funzione di Lyapunov definita positiva

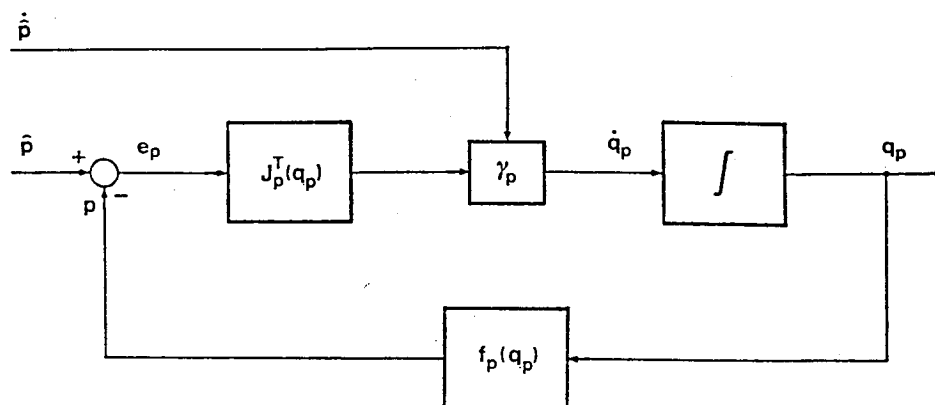


Fig. 6.2

$$\dot{v}_h = \frac{1}{2}(\underline{e}_s^T \underline{e}_s + \underline{e}_a^T \underline{e}_a) \quad (6.20)$$

La sua derivata nel tempo, tenendo conto della (3.49), risulta semplicemente data da

$$\dot{v}_h = -\underline{s}^T \dot{\underline{s}} - \underline{a}^T \dot{\underline{a}} - \dot{\underline{s}}^T \underline{s} - \dot{\underline{a}}^T \underline{a} \quad (6.21)$$

la quale, per via della (6.13), risulta ancora

$$\dot{v}_h = -\underline{s}^T \dot{\underline{s}} - \underline{a}^T \dot{\underline{a}} - (\underline{s}^T J_{sp} + \underline{a}^T J_{ap}) \dot{\underline{q}}_p - (\underline{s}^T J_s + \underline{a}^T J_a) \dot{\underline{q}}_h \quad (6.22)$$

Si può osservare innanzitutto che, in virtù della (3.46) e della (3.49), si ha $v_h = \dot{v}_h = 0$ allorché $\underline{s} = \hat{\underline{s}}$ ed $\underline{a} = \hat{\underline{a}}$, così come sarebbe stato da attendersi. Allo scopo poi di analizzare il termine premoltiplicato al controllo da sintetizzare $\dot{\underline{q}}_h$, si proiettino i versori desiderati $\hat{\underline{s}}$ ed $\hat{\underline{a}}$ sulla terna $(\underline{s}, \underline{a}, \underline{n})$; sempre tenendo conto della (3.49) si ha

$$\hat{\underline{s}}^T J_s + \hat{\underline{a}}^T J_a = \hat{s}_a \underline{a}^T J_s + \hat{s}_n \underline{n}^T J_s + \hat{a}_n \underline{n}^T J_a + \hat{a}_s \underline{s}^T J_a \quad (6.23)$$

ove le quantità scalari con i pedici denotano le componenti di $\hat{\underline{s}}$ ed $\hat{\underline{a}}$ lungo gli assi della terna $(\underline{s}, \underline{a}, \underline{n})$. Sulla base della (3.53) poi, la (6.23) può riscriversi come

$$\hat{\underline{s}}^T J_s + \hat{\underline{a}}^T J_a = (\hat{a}_s - \hat{s}_a) \underline{s}^T J_a - \hat{a}_n \underline{a}^T J_n + \hat{s}_n \underline{n}^T J_s \quad (6.24)$$

Osservando quindi che i vettori $(\underline{s}^T J_a, \underline{a}^T J_n, \underline{n}^T J_s)$ formano una base di vettori nello spazio R^3 (si vedano i vettori $(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3)$ definiti nel § 3.7), si ha che il termine (6.24) si annulla se e soltanto se

$$\hat{a}_s = \hat{s}_a \quad \hat{a}_n = \hat{s}_n = 0 \quad (6.25)$$

Tali condizioni, in termini dell'orientamento relativo delle due terne $(\underline{s}, \underline{a}, \underline{n})$ e $(\underline{\hat{s}}, \underline{\hat{a}}, \underline{\hat{n}})$, comportano due situazioni di indeterminazione possibili:

$$i) \quad \underline{\hat{n}} = -\underline{n}, \quad \forall \underline{s}, \underline{\hat{s}}, \underline{a}, \underline{\hat{a}} \quad (6.26)$$

$$ii) \quad \underline{\hat{n}} = \underline{n}, \quad \underline{\hat{s}} = -\underline{s}, \quad \underline{\hat{a}} = -\underline{a} \quad (6.27)$$

Nel primo caso (6.26), risulta $\|(\underline{e}_s^T \quad \underline{e}_a^T)\| = 2$, laddove nel secondo caso (6.27), si ha $\|(\underline{e}_s^T \quad \underline{e}_a^T)\| = \|(\underline{e}_s^T \quad \underline{e}_a^T)_{\max}\| = 2\sqrt{2}$; l'occorrenza di tali situazioni è obiettivamente di nessun interesse per un algoritmo convergente. In altri termini, a condizione che l'algoritmo parta con le stesse condizioni iniziali $(\underline{s} = \underline{\hat{s}}, \underline{a} = \underline{\hat{a}})$, od al limite anche con un errore iniziale $\|(\underline{e}_s^T(0) \quad \underline{e}_a^T(0))\| < 2$, si ha che, realizzando una $\dot{\underline{v}}_h$ definita negativa solo localmente, la convergenza dell'algoritmo è assicurata, poiché si evitano le due situazioni di indeterminazione (6.26) e (6.27).

A tal punto, osservando che i primi due termini a secondo membro della (6.22) tendono a zero allorché $\underline{s} \rightarrow \underline{\hat{s}}$ ed $\underline{a} \rightarrow \underline{\hat{a}}$, è matura la scelta per il controllo $\dot{\underline{q}}_h$, ovvero

$$\dot{\underline{q}}_h = \gamma_h \underline{\text{sgn}}(J_s^T \underline{\hat{s}} + J_a^T \underline{\hat{a}}) \quad (6.28)$$

ove $\underline{\text{sgn}} \underline{w} := (\text{sgn } w_1 \quad \dots \quad \text{sgn } w_r)^T$, $\underline{w} \in R^r$, e

$$\gamma_h \geq [\|\dot{\underline{\hat{s}}}\|_{\max} + \|\dot{\underline{\hat{a}}}\|_{\max} + \|\dot{\underline{q}}_p\|_{\max} (|\Lambda(J_{sp})| + |\Lambda(J_{ap})|)] \times (|\lambda(J_s)| + |\lambda(J_a)|)^{-1} \quad (6.29)$$

ove $\Lambda(A)$ e $\lambda(A)$ denotano rispettivamente l'autovalore massimo e l'autovalore minimo della matrice A .

Come per il primo stadio, se si accetta un errore di inseguimento finito allo scopo di ottenere le velocità ai giunti $\dot{\underline{q}}_h$, si può adottare la legge di controllo puramente

proporzionale (Fig. 6.3)

$$\dot{\underline{q}}_h = \gamma_h (J_s^T \underline{\hat{s}} + J_a^T \underline{\hat{a}}) \quad (6.30)$$

che comunque assicura la convergenza dell'algoritmo a regime ($\underline{\hat{s}} = \underline{0}$, $\underline{\hat{a}} = \underline{0}$ e $\dot{\underline{q}}_p = \underline{0}$), mentre gli errori di inseguimento dipenderanno in maniera diretta dalle velocità $\|\underline{\hat{s}}\|$, $\|\underline{\hat{a}}\|$ e $\|\dot{\underline{q}}_p\|$, ed in maniera inversa dal guadagno γ_h .

E' interessante sottolineare come l'algoritmo di inversione cinematica relativo al secondo stadio risulta persino più semplice di quello relativo al primo stadio, poiché non bisogna valutare i versori correnti $\underline{s}$ ed $\underline{a}$ per determinare $\dot{\underline{q}}_h$; il motivo è insito nel fatto che, in virtù della (3.49), tali versori sono nella direzione dei nulli delle trasposte delle rispettive matrici Jacobiane J_s e J_a , e quindi irrilevanti al computo del controllo $\dot{\underline{q}}_h$.

Incidentalmente si può notare che se si estendesse la dimensione dello spazio di stato dell'errore, introducendo una componente addizionale $\underline{\hat{n}} - \underline{n}$, si avrebbe una funzione di Lyapunov

$$v_h = \frac{1}{2} (\underline{e}_s^T \quad \underline{e}_a^T \quad \underline{e}_n^T) \begin{bmatrix} \underline{e}_s \\ \underline{e}_a \\ \underline{e}_n \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

la cui derivata, tenendo presente la (3.49) e la (3.53) ed eseguendo la stessa operazione di proiezione di cui sopra, risulterebbe

$$\begin{aligned} \dot{v}_h = & -\underline{s}^T \dot{\underline{s}} - \underline{a}^T \dot{\underline{a}} - \underline{n}^T \dot{\underline{n}} - (\underline{\hat{s}}^T J_{sp} + \underline{\hat{a}}^T J_{ap} + \underline{\hat{n}}^T J_{np}) \dot{\underline{q}}_p + \\ & - [(\underline{\hat{a}}_s - \underline{\hat{s}}_a) \underline{s}^T J_a + (\underline{\hat{n}}_a - \underline{\hat{a}}_n) \underline{a}^T J_n + (\underline{\hat{s}}_n - \underline{\hat{n}}_s) \underline{n}^T J_s] \dot{\underline{q}}_h \end{aligned} \quad (6.32)$$

ove J_{np} e J_n sono definiti in maniera analoga alle matrici Jacobiane per $\underline{s}$ ed $\underline{a}$. Anche in tal caso, quindi, si avrebbe

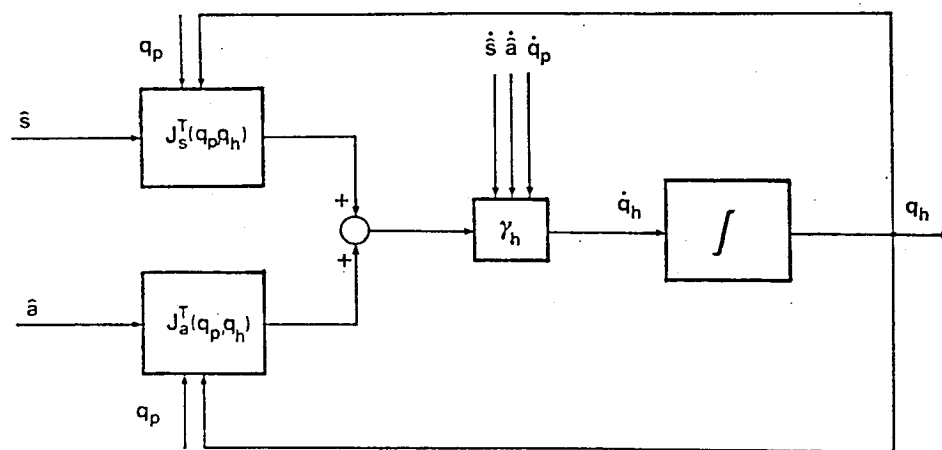


Fig. 6.3

che $\dot{v}_h$ presenterebbe almeno le stesse situazioni di indeterminazione (6.26) e (6.27); pertanto si può concludere affermando che due componenti per l'errore di orientamento sono sufficienti alla corretta individuazione dell'algoritmo per il secondo stadio. D'altro canto si è già detto che $\underline{n}$ risulta univocamente determinato come $\underline{s} \times \underline{a}$.

6.4 Assi che si intersecano a due a due

Per una struttura cinematica del tipo di quella in Fig. 6.1b, l'equazione cinematica caratteristica (6.4), tenendo conto della partizione (6.8), risulta

$$\underline{p}' = \underline{f}_{p'}(\underline{q}_p) \quad (6.33)$$

relativamente al primo stadio. Nel § 6.2, tuttavia, si è osservato come, allo scopo di ottenere univocamente la soluzione per $\underline{q}_p$, sia necessario introdurre un vincolo addizionale alla (6.33). Più precisamente [7], una volta che le variabili desiderate sono state assegnate $(\hat{\underline{p}}, \hat{\underline{s}}, \hat{\underline{a}})$, il primo stadio dell'algoritmo deve garantire non solo che $\underline{p}'$ coincida con $\hat{\underline{p}}'$, ma anche che il braccio 5 sia orientato in maniera tale da formare con il braccio 6 un angolo che coincida proprio con l'angolo di rotazione tra i due giunti α_5 , in modo tale da garantire che la configurazione corrente della struttura sia consistente con i suoi parametri cinematici caratteristici costanti. Tale vincolo può essere espresso in termini cinematici come

$$\hat{\underline{a}}^T \underline{z}_4 = \cos \alpha_5 \quad (6.34)$$

ove $\hat{\underline{a}} = \hat{\underline{z}}_5$ è assegnato nello spazio Cartesiano, e $\underline{z}_4$ deve essere determinato attraverso $\underline{q}_p^T = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ \theta_4)$ in modo da soddisfare il vincolo (6.34).

Per quanto riguarda la definizione degli errori nello spazio Cartesiano, in tal caso si ha

$$\underline{e}_p = \underline{\hat{p}}' - \underline{f}_p(\underline{q}_p) \quad (6.35)$$

$$e_{z4} = \cos\alpha_5 - \underline{\hat{a}}^T \underline{f}_{z4}(\underline{q}_p)$$

ove $\underline{f}_{z4}(\underline{q}_p)$ è la funzione cinematica diretta che lega $\underline{q}_p$ a $\underline{z}_4$, la quale è facilmente esprimibile conoscendo le prime quattro trasformazioni omogenee A del manipolatore. Sulla base della (6.35) la dinamica dell'errore risulta

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{e}}_p \\ \dot{e}_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{\hat{p}}}' \\ -\dot{\underline{\hat{a}}}^T \underline{f}_{z4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_p \\ \underline{\hat{a}}^T J_{z4} \end{bmatrix} \dot{\underline{q}}_p \quad (6.36)$$

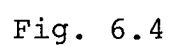
ove J_p è la matrice Jacobiana (3 x 4) $\partial \underline{f}_p / \partial \underline{q}_p$ ed analogamente J_{z4} è la matrice Jacobiana (3 x 4) $\partial \underline{f}_{z4} / \partial \underline{q}_p$. Si scelga quindi

$$v_p = \frac{1}{2} (\underline{e}_p^T \underline{e}_p + e_{z4}^2) \quad (6.37)$$

come funzione di Lyapunov definita positiva associata agli errori (6.35). La sua derivata rispetto al tempo risulta

$$\dot{v}_p = (\underline{e}_p^T \ e_{z4}) \begin{bmatrix} \dot{\underline{\hat{p}}}' \\ -\dot{\underline{\hat{a}}}^T \underline{f}_{z4} \end{bmatrix} - (\underline{e}_p^T \ e_{z4}) \begin{bmatrix} J_p \\ \underline{\hat{a}}^T J_{z4} \end{bmatrix} \dot{\underline{q}}_p \quad (6.38)$$

E' da sottolineare come la matrice premoltiplicata a $\dot{\underline{q}}_p$ nella (6.38) abbia rango quattro quasi ovunque, poiché sono necessari quattro gradi di libertà per posizionare il punto P' e far giacere il braccio 5 su una superficie. Per essere più specifici (Fig. 6.4), il primo stadio dell'algoritmo



deve garantire non solo che $\underline{p}' = \hat{\underline{p}}'$, ma anche che il braccio 5, individuato da d_5 , giaccia sul cono Γ di asse $\underline{a}$, angolo α_5 e vertice in P' ; così facendo, tuttavia, $\underline{a}$ ed $\hat{\underline{a}}$ non giacciono necessariamente nella stessa direzione, poiché si è garantito solo che $\underline{a}$ giaccia sul cono Γ' di asse $\underline{z}_4$, stesso angolo α_5 e vertice in P' come evidenziato in Fig. 6.4. Sarà compito, ovviamente, del secondo stadio dell'algoritmo modificare θ_5 in modo da allineare $\underline{a}$ con $\hat{\underline{a}}$, e θ_6 , la quale non fa variare $\underline{a}$, condurrà $\underline{s}$ su $\hat{\underline{s}}$.

Orbene, il controllo $\dot{\underline{q}}_p$ del primo stadio può essere scelto come

$$\dot{\underline{q}}_p = \gamma_p \text{sgn}(J_{p-p}^T \underline{e}_p + J_{z4}^T \hat{\underline{a}} \underline{e}_{z4}) \quad (6.39)$$

ove

$$\gamma_p \geq (\|\dot{\underline{p}}\|_{\max} + \|\dot{\hat{\underline{a}}}\|_{\max}) \left| \lambda \begin{bmatrix} J_p \\ \hat{\underline{a}}^T J_{z4} \end{bmatrix} \right|^{-1} \quad (6.40)$$

che assicura una $\dot{v}_p$ definita negativa. Si può notare come, a condizione che l'algoritmo parta con le stesse condizioni iniziali, $\underline{q}_p(0) = \hat{\underline{q}}_p(0)$, si evita una possibile condizione di indeterminazione nel vincolo (6.34) nei riguardi di $\cos \alpha_5 = \cos(-\alpha_5)$. Considerazioni analoghe si possono poi fare circa le caratteristiche dell'algoritmo, e ricavare poi la legge di controllo di tipo proporzionale, il cui schema di controllo è illustrato in Fig. 6.5,

$$\dot{\underline{q}}_p = \gamma_p (J_{p-p}^T \underline{e}_p + J_{z4}^T \hat{\underline{a}} \underline{e}_{z4}) \quad (6.41)$$

che permette di ottenere i profili di velocità dei primi quattro giunti, a condizione di ammettere errori di inseguimento finiti.

Per quel che concerne il secondo stadio, la derivazione

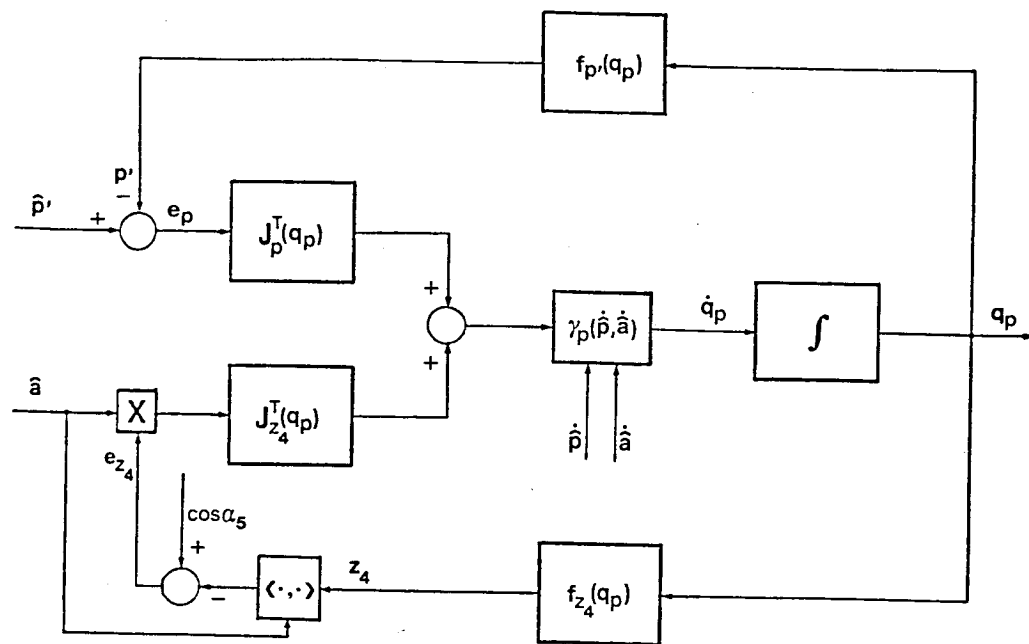


Fig. 6.5

dell'algoritmo non si differenzia sostanzialmente da quella del caso di polso sferico. Infatti, procedendo in maniera del tutto analoga al caso precedente, si possono prima definire gli errori

$$\begin{aligned}\underline{e}_s &= \underline{\hat{s}} - \underline{f}_s(\underline{q}) \\ \underline{e}_a &= \underline{\hat{a}} - \underline{f}_a(\underline{q}_p, \theta_5)\end{aligned}\tag{6.42}$$

per poi ottenere la dinamica dell'errore nella forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{e}}_s \\ \dot{\underline{e}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{\hat{s}}} \\ \dot{\underline{\hat{a}}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{sp} \\ J_{ap} \end{bmatrix} \dot{\underline{q}}_p - \begin{bmatrix} J_s \\ J_a \end{bmatrix} \dot{\underline{q}}_h\tag{6.43}$$

ove J_{sp} e J_{ap} sono rispettivamente le matrici Jacobiane (3 x 4) $\partial \underline{f}_s / \partial \underline{q}_p$ e $\partial \underline{f}_a / \partial \underline{q}_p$, ed analogamente J_s e J_a sono rispettivamente le matrici Jacobiane (3 x 2) $\partial \underline{f}_s / \partial \underline{q}_h$ e $\partial \underline{f}_a / \partial \underline{q}_h$. Scegliendo quindi la funzione di Lyapunov definita positiva

$$v_h = \frac{1}{2} (\underline{e}_s^T \underline{e}_s + \underline{e}_a^T \underline{e}_a)\tag{6.44}$$

associata agli errori definiti nella (6.42), si può procedere come nel caso precedente e, tenendo conto dei vincoli sugli Jacobiani espressi dalla (3.49) e dalla (3.53) e delle relative proprietà cinematiche, si ottiene la legge di controllo

$$\dot{\underline{q}}_h = \gamma_h \underline{\text{sgn}}(J_s^T \underline{\hat{s}} + J_a^T \underline{\hat{a}})\tag{6.45}$$

ove

$$\gamma_h \geq [\|\dot{\underline{s}}\|_{\max} + \|\dot{\underline{a}}\|_{\max} + \|\dot{\underline{q}}_p\|_{\max} (\lambda (J_{sp}^T J_{sp} + J_{ap}^T J_{ap}))^{1/2}] \quad (6.46)$$

$$\times (\lambda (J_s^T J_s + J_a^T J_a))^{-1/2}$$

L'analogia legge di controllo proporzionale (Fig. 6.6) risulta

$$\dot{\underline{q}}_h = \gamma_h (J_s^T \hat{\underline{s}} + J_a^T \hat{\underline{a}}) \quad (6.47)$$

6.5 Assi sghembi

Per una struttura cinematica del tipo di quella in Fig. 6.1c, l'equazione cinematica caratteristica (6.4), tenendo conto della partizione (6.8), risulta

$$\underline{p}' = \underline{f}_{p'}(\underline{q}_p) \quad (6.48)$$

Nel § 6.2, tuttavia, si è evidenziato come, per ottenere la soluzione $\underline{q}_p$ in maniera univoca, sia necessario introdurre due vincoli addizionali alla (6.48) [5]. Si intuisce come il vincolo introdotto per il caso di assi che si intersecano a due a due sia necessario anche in tale caso, ovvero il primo stadio deve garantire non solo che $\underline{p}'$ coincida con $\hat{\underline{p}}'$, ma anche che il braccio 5 sia orientato in maniera tale da formare con il braccio 6 un angolo che coincida proprio con l'angolo di rotazione tra i due giunti α_5 , che in termini cinematici si traduce in

$$\hat{\underline{a}}^T \underline{z}_4 = \cos \alpha_5 \quad (6.49)$$

Il secondo vincolo può ricavarsi osservando che, poiché il primo stadio dell'algoritmo deve determinare $\underline{q}_p^T = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ \theta_4 \ \theta_5)$, la direzione del versore $\underline{a}$ di conseguenza deve essere determinata in tale stadio, poiché $q_h = \theta_6$ non fa variare

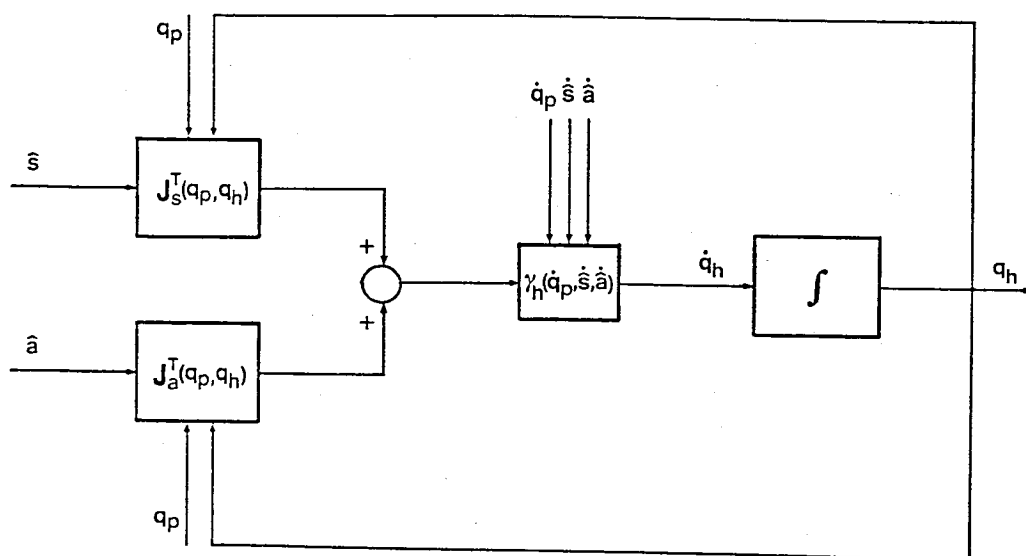


Fig. 6.6

affatto tale direzione nel secondo stadio. Il vincolo pertanto risulta

$$\hat{\underline{a}}^T \underline{a} = 1 \quad (6.50)$$

Gli errori quindi risultano definiti come

$$\begin{aligned} \underline{e}_p &= \hat{\underline{p}}' - \underline{f}_p(\underline{q}_p) \\ e_{z4} &= \cos \alpha_5 - \hat{\underline{a}}^T \underline{f}_{z4}(\underline{q}_p) \\ e_a &= 1 - \hat{\underline{a}}^T \underline{f}_a(\underline{q}_p) \end{aligned} \quad (6.51)$$

e le loro derivate risultano

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{e}}_p \\ \dot{e}_{z4} \\ \dot{e}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\underline{p}}}' \\ -\dot{\hat{\underline{a}}}^T \underline{f}_{z4} \\ -\dot{\hat{\underline{a}}}^T \underline{f}_a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_p^T \\ \hat{\underline{a}}^T J_{z4} \\ \hat{\underline{a}}^T J_a \end{bmatrix} \dot{\underline{q}}_p \quad (6.52)$$

ove J_p è la matrice Jacobiana (3 x 5) $\partial \underline{f}_p' / \partial \underline{q}_p$, J_{z4} è la matrice Jacobiana (3 x 5) $\partial \underline{f}_{z4} / \partial \underline{q}_p$ e J_a è la matrice Jacobiana (3 x 5) $\partial \underline{f}_a / \partial \underline{q}_p$. Si scelga quindi

$$v_p = \frac{1}{2} (\underline{e}_p^T \underline{e}_p + e_{z4}^2 + e_a^2) \quad (6.53)$$

come funzione di Lyapunov definita positiva associata agli errori (6.51). La sua derivata nel tempo risulta

$$\dot{v}_p = (\underline{e}_p^T \ e_{z4} \ e_a) \begin{bmatrix} \dot{\hat{\underline{p}}}' \\ -\dot{\hat{\underline{a}}}^T \underline{f}_{z4} \\ -\dot{\hat{\underline{a}}}^T \underline{f}_a \end{bmatrix} - (\underline{e}_p^T \ e_{z4} \ e_a) \begin{bmatrix} J_p^T \\ \hat{\underline{a}}^T J_{z4} \\ \hat{\underline{a}}^T J_a \end{bmatrix} \dot{\underline{q}}_p \quad (6.54)$$

ove la matrice premoltiplicata a $\dot{\underline{q}}_p$ ha rango cinque quasi ovunque. Il controllo $\dot{\underline{q}}_p$ del primo stadio può scegliersi

come

$$\dot{\underline{q}}_p = \gamma_p \text{sgn}(J_{p-p}^T \underline{e}_p + J_{z4}^T \hat{\underline{a}} \underline{e}_{z4} + J_a^T \hat{\underline{a}}) \quad (6.55)$$

ove

$$\gamma_p \geq (\|\dot{\underline{p}}\|_{\max} + \|\dot{\underline{a}}\|_{\max}) \left| \lambda \begin{bmatrix} J_p^T \\ \hat{\underline{a}}^T J_{z4} \\ \hat{\underline{a}}^T J_a \end{bmatrix} \right|^{-1} \quad (6.56)$$

che assicura una $\dot{v}_p$ definita negativa.

Nel secondo stadio si ha che $q_h = \theta_6$ deve unicamente provvedere ad allineare $\underline{s}$ con $\hat{\underline{s}}$. Quindi si ha

$$\underline{e}_s = \hat{\underline{s}} - \underline{f}_s(\underline{q}) \quad (6.57)$$

e

$$\dot{\underline{e}}_s = \dot{\hat{\underline{s}}} - J_{sp} \dot{\underline{q}}_p - \underline{j}_s \dot{\theta}_6 \quad (6.58)$$

ove J_{sp} è la matrice Jacobiana (3 x 5) $\partial \underline{f}_s / \partial \underline{q}_p$, e $\underline{j}_s$ è il vettore Jacobiano (3 x 1) $\partial \underline{f}_s / \partial \theta_6$.

Procedendo nella solita maniera si può ricavare direttamente il controllo

$$\dot{\theta}_6 = \gamma_s \text{sgn}(\underline{j}_s^T \hat{\underline{s}}) \quad (6.59)$$

ove

$$\gamma_s \geq [\|\dot{\hat{\underline{s}}}\|_{\max} + \|\dot{\underline{q}}_p\|_{\max} (\lambda(J_{sp}^T J_{sp}))^{1/2}] (\lambda(\underline{j}_s^T \underline{j}_s))^{-1/2} \quad (6.60)$$

I relativi schemi di controllo non vengono raffigurati per brevità.

6.6 Due esempi di applicazione

In tale paragrafo si svilupperanno due esempi di applicazione degli algoritmi di inversione cinematica sopra descritti ai due manipolatori introdotti nel § 3.4, mettendo in evidenza le caratteristiche di implementazione numerica degli stessi.

6.6.1 Manipolatore di Stanford

Si riprenda il manipolatore di Stanford di Fig. 3.7. Come già osservato in precedenza, si tratta di un manipolatore con polso sferico. Le funzioni cinematiche dirette (6.10) e (6.11), unitamente all'espressione degli Jacobiani nelle (6.12) e (6.13) sono riportate nell'Appendice 1, [6].

Nel § 4.4 si è visto come per tale manipolatore, essendo soddisfatta la condizione sufficiente di Pieper [8], esista la soluzione dell'equazione cinematica in forma chiusa, che infatti è data dalle (4.14)-(4.16) e (4.22)-(4.24). Dal punto di vista computazionale, tale soluzione richiede il calcolo di otto funzioni trascendenti, 39 moltiplicazioni in virgola mobile, 19 addizioni e due radici quadrate, unitamente a cinque funzioni arcotangente di due argomenti. Nel caso poi si richiedano anche le velocità ai giunti, il numero di operazioni necessarie aumenta [9].

L'algoritmo descritto nel § 6.3 richiede un numero maggiore di operazioni da calcolare (10 funzioni trascendenti, 89 moltiplicazioni in virgola mobile e 50 addizioni). Tuttavia, non si richiede alcun calcolo addizionale per la generazione delle velocità ai giunti, se desiderate, né per la selezione di una soluzione tra quelle possibili per ogni configurazione dell'organo terminale (pensando di applicare tale algoritmo per l'inversione cinematica di una traiettoria assegnata all'organo terminale del manipolatore). Riguardo quest'ultimo punto, una volta specificata la

configurazione iniziale del manipolatore, l'algoritmo di soluzione procede con continuità lungo la traiettoria assegnata, essendo gli errori di inseguimento molto piccoli. Di tale algoritmo è stata anche realizzata l'implementazione su un sistema a microprocessore dedicato con unità hardware per le moltiplicazioni in virgola mobile [10].

Allo scopo di illustrare l'efficienza dell'algoritmo, si è simulato il seguente esempio numerico [6]. La traiettoria desiderata è assegnata nello spazio Cartesiano in termini di:

- (a) una retta dal punto $\hat{p}_0 = (.3, -.3, .2)$ m al punto $\hat{p}_f = (.4, .05, .04)$ m,
- (b) rotazioni agli angoli di Eulero da $(\phi_0, \theta_0, \psi_0) = (45 \ 75 \ 105)^\circ$ a $(\phi_f, \theta_f, \psi_f) = (135, 165, 195)^\circ$.

Si sono scelti due differenti profili di velocità:

- (a) il triangolare (accelerazione, decelerazione) (Fig. 6.7a),
- (b) il trapezoidale (accelerazione, crociera, decelerazione) (Fig. 6.7b), con tempi di accelerazione molto brevi.

In Tab. 6.1 poi sono riportati i valori delle velocità massime $v_{\max}$ in Fig. 6.7; le traiettorie più lente sono tipiche di quei compiti nei quali al robot si richiede di eseguire una lavorazione, mentre quelle più veloci si intendono riferite a compiti di trasferimento di pezzi per il robot.

Il sistema simulato, ovviamente, è un sistema a dati campionati; il periodo di campionamento scelto è 2 msec, che è un tempo ritenuto sufficiente al computo di tutte le operazioni necessarie nel ciclo di controllo. Si osserva, tuttavia, che se si adottassero le soluzioni di tipo discontinuo (6.17) e (6.28), ci si dovrebbe comunque aspettare degli errori di inseguimento finiti, essendo il sistema reale non a tempo continuo. Di conseguenza, si è optato per le leggi di controllo di tipo proporzionale (6.19) e (6.30) per valutare le prestazioni dell'algoritmo nelle condizioni peggiori, poiché errori di inseguimento finiti sono già da

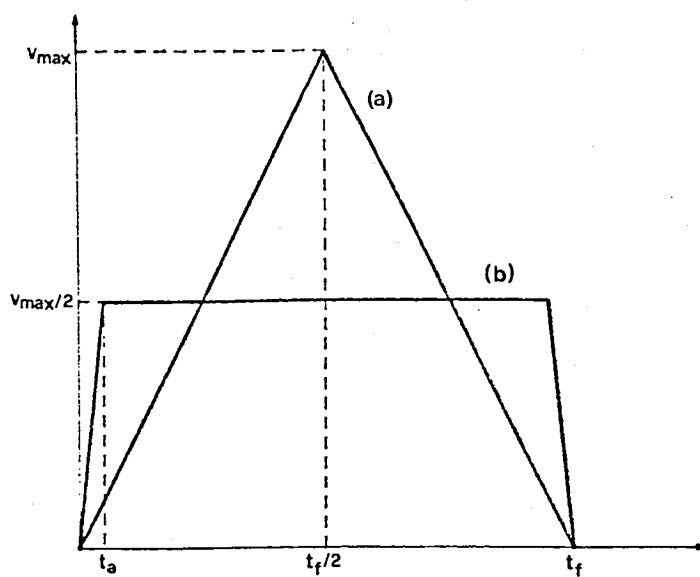


Fig. 6.7

t_a [s]	t_f [s]	$ \dot{p}_{\max} $ [m/s]	$\dot{\alpha}_{\max} = \dot{\beta}_{\max} = \dot{\gamma}_{\max}$ [°/s]
0.05	1	0.8	90
0.2	4	0.2	22.5
0.5	10	0.08	9
2	40	0.02	2.25

Tab. 6.1

aspettarsi per il sistema a tempo continuo. Il vantaggio inerente in tale scelta, tuttavia, sta nella possibilità di generare direttamente, senza calcoli addizionali, i profili di velocità ai giunti. I valori dei guadagni γ_p nella (6.19) e γ_h nella (6.30) sono stati scelti rispettivamente pari a 950 e 450.

Nelle Figg. 6.8 e 6.9 sono diagrammati gli errori di inseguimento in posizione $\|\underline{e}_p\|$ rispettivamente per la traiettoria più lenta e per quella più veloce. Nelle Figg. 6.10 e 6.11, invece sono riportati gli errori di orientamento maggiori tra $e_s = \cos^{-1}(\hat{s}^T \underline{s})$ ed $e_a = \cos^{-1}(\underline{a}^T \underline{a})$. Dal momento che si è supposto di partire con le stesse condizioni iniziali, $\underline{e}_p(0) = \underline{e}_s(0) = \underline{e}_a(0) = \underline{0}$, gli errori di inseguimento risultano molto contenuti lungo le varie traiettorie, ed a regime, così come previsto, si annullano in virtù della struttura a ciclo chiuso degli schemi di inversione cinematica di Figg. 6.2 e 6.3. Infine in Fig. 6.12, per i due differenti profili di velocità, si sono riportati gli errori di posizione massimi in corrispondenza dei quattro valori di velocità lineare massimi della Tab. 6.1; risulta evidente che esiste una stretta proporzionalità tra tali errori e le velocità così come anticipato nel § 6.3. Tale risultato trova riscontro nella pratica, dal momento che la precisione di inseguimento di una traiettoria deve essere più elevata per un robot di lavorazione, tipicamente lento, che per un robot di manipolazione, tipicamente più veloce.

6.6.2 Manipolatore prototipo

Si consideri ora il manipolatore prototipo di Fig. 3.8. Come già evidenziato in precedenza si tratta di un manipolatore in cui gli assi di rotazione terminali si intersecano a due a due. Le funzioni cinematiche dirette nelle (6.33), (6.34) e (6.42), unitamente alle espressioni degli Jacobiani (6.36) e (6.43) sono riportate nell'Appendice 2, [7].

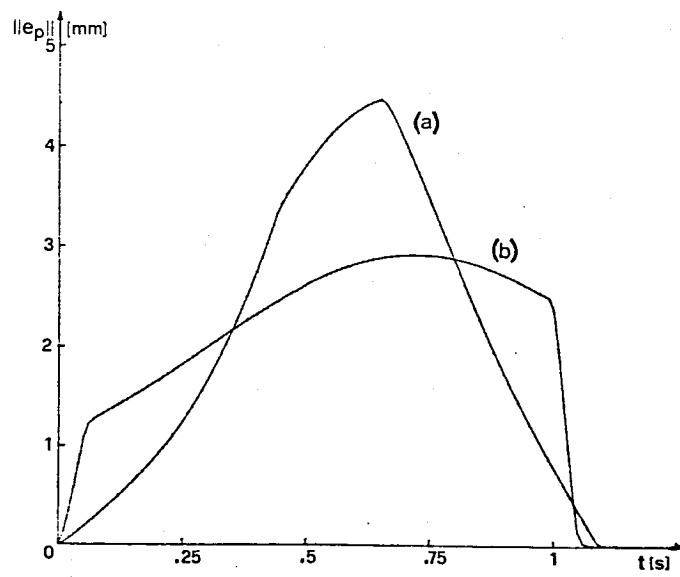


Fig. 6.8

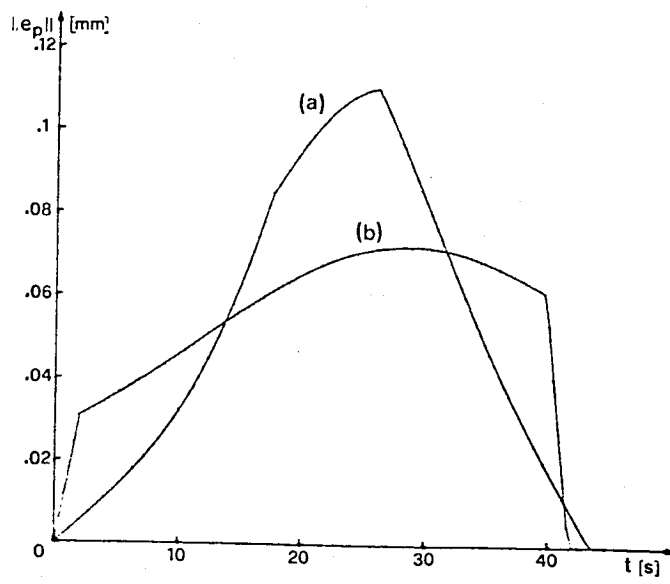


Fig. 6.9

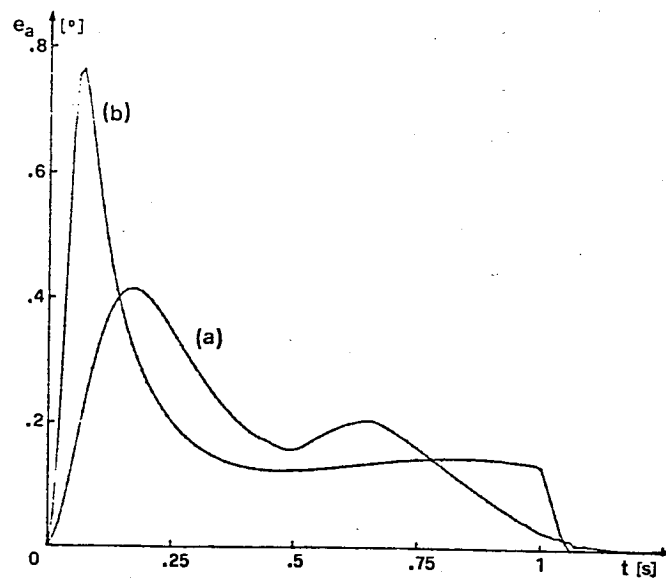


Fig. 6.10

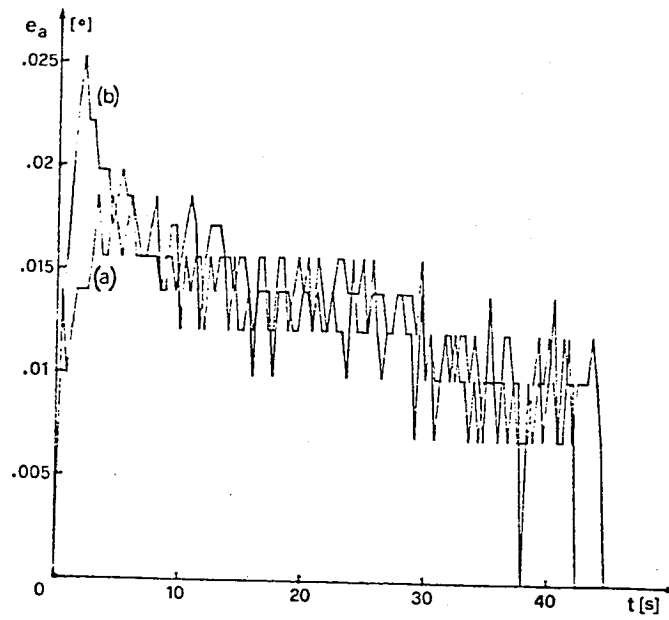


Fig. 6.11

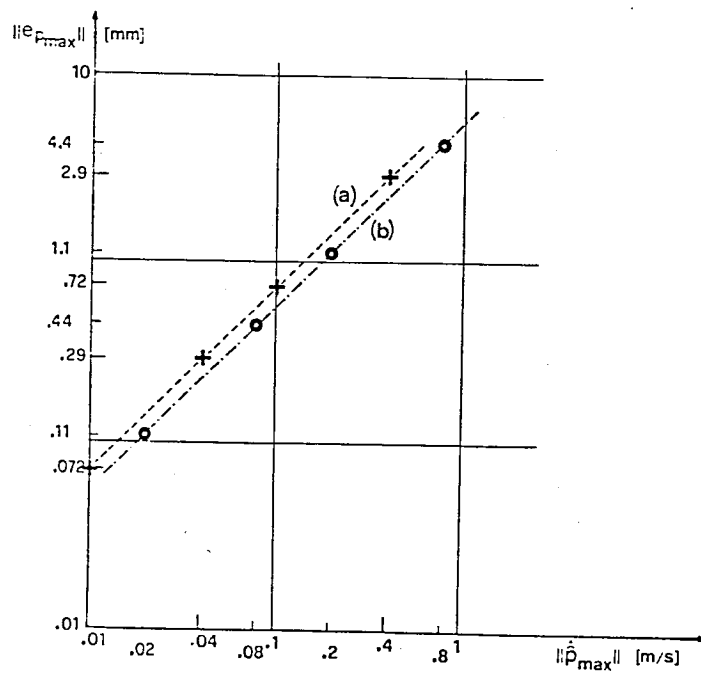


Fig. 6.12

Nel § 4.4.2 si è visto come per tale manipolatore non è soddisfatta la condizione sufficiente di Pieper [8], il che ovviamente non autorizza ad affermare che una soluzione in forma chiusa non esista.

Una tecnica di soluzione è stata proposta in [3]. Essa si basa sostanzialmente sulla risoluzione di due problemi cinematici ridotti di ordine 3, per i quali è possibile trovare una soluzione in forma chiusa. La tecnica vera e propria consiste quindi nell'alternare le due soluzioni, a partire da certe condizioni iniziali, fino ad ottenere un errore ragionevolmente piccolo. Tale tecnica di soluzione è analoga a quella proposta in [11] per una generica struttura cinematica, ovvero una tecnica di tipo misto: iterativa tra due soluzioni in forma chiusa. Tuttavia, circa la convergenza di tali metodi di soluzione, non si può impiantare alcun discorso rigoroso dal punto di vista matematico. Ad es. in [3] si afferma che il metodo iterativo converge 'in media' in quattro o cinque iterazioni, a condizioni di accettare errori in orientamento inferiori a 0.1° e di essere 'sufficientemente' distanti da un punto di singolarità per la struttura cinematica. Come si vede, tali affermazioni sono solo qualitative, e contengono scarsa informazione circa l'applicabilità di tale metodo.

Se si computa poi il numero di operazioni richiesto, si ottengono otto funzioni trascendenti, 41 moltiplicazioni in virgola mobile, 24 addizioni e tre radici quadrate, unitamente a sette funzioni arcotangente di due argomenti: tutto ciò per ogni iterazione! Pertanto il numero medio di operazioni richieste rende tale tecnica impraticabile per eseguire, a tempi di campionamento comparabili a quelli del ciclo di controllo dinamico ai giunti, l'inversione cinematica lungo una traiettoria assegnata nello spazio Cartesiano. L'unica possibilità resta quindi quella di interpolare nello spazio dei giunti tra un certo numero di soluzioni, ottenute con un periodo di campionamento più lungo. Nondimeno, dal

momento che il numero di operazioni non può essere fissato a priori, bisogna scegliere sempre il periodo di campionamento nel caso peggiore, per quel che riguarda il controllo; tuttavia più distanti sono le soluzioni tra di loro nello spazio dei giunti, maggiori sono gli errori che si commettono rispetto alle soluzioni esatte lungo la traiettoria. Se infine si desiderano anche le velocità ai giunti, il carico computazionale aumenta notevolmente.

D'altro canto, l'algoritmo descritto nel § 6.4, scavalca molti degli ostacoli di cui sopra: si richiede un numero ragionevolmente contenuto di operazioni (dieci funzioni trascendenti, 112 moltiplicazioni in virgola mobile e 58 addizioni); a condizione di partire da condizioni iniziali nulle, $\underline{q}(0) = \hat{\underline{q}}(0)$, l'algoritmo progredisce con continuità lungo la traiettoria, fornendo configurazioni adiacenti nello spazio dei giunti; gli errori di inseguimento sono molto piccoli mentre quelli a regime sono praticamente nulli, come sarà mostrato nell'esempio numerico simulato.

Due esempi numerici sono stati simulati per tale manipolatore [7]. Le traiettorie desiderate da inseguire nello spazio Cartesiano sono illustrate rispettivamente in Fig. 6.13 e 6.14. Un profilo di velocità trapezoidale (Fig. 6.15) è stato imposto sia per il vettore posizione che per gli angoli di Eulero. In Tab. 6.2 sono riportati i valori di velocità $v_{\max}$ e le durate t_f di Fig. 6.15. Come si può facilmente constatare, la seconda traiettoria attraversa un punto di singolarità, caratterizzato da $(\hat{p}'_x = \hat{p}'_y = 0)$.

Sulla base di considerazioni analoghe a quelle fatte nel precedente esempio, si adottano le leggi di controllo di tipo proporzionale (6.41) e (6.47). Il periodo di campionamento scelto è 2 msec, a condizione di implementare il tutto su un sistema a microprocessore con moltiplicatore in virgola mobile hardware. I valori dei guadagni γ_p e γ_h rispettivamente nelle (6.41) e (6.47) sono stati scelti entrambi pari a 500.

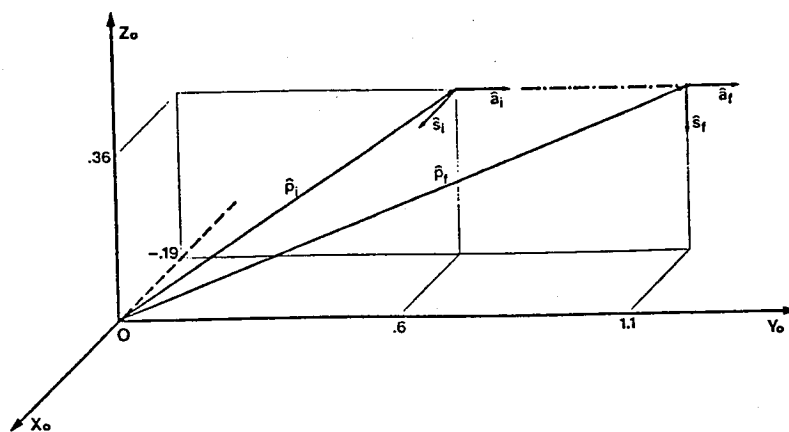


Fig. 6.13

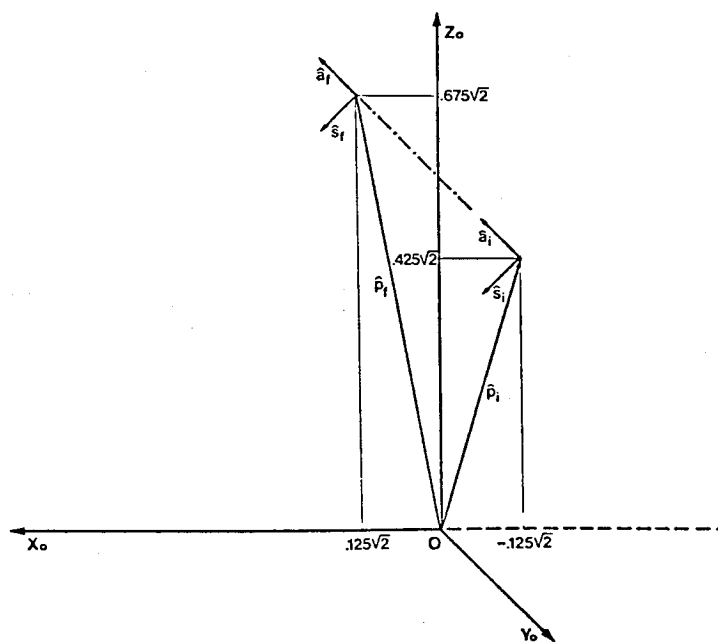


Fig. 6.14

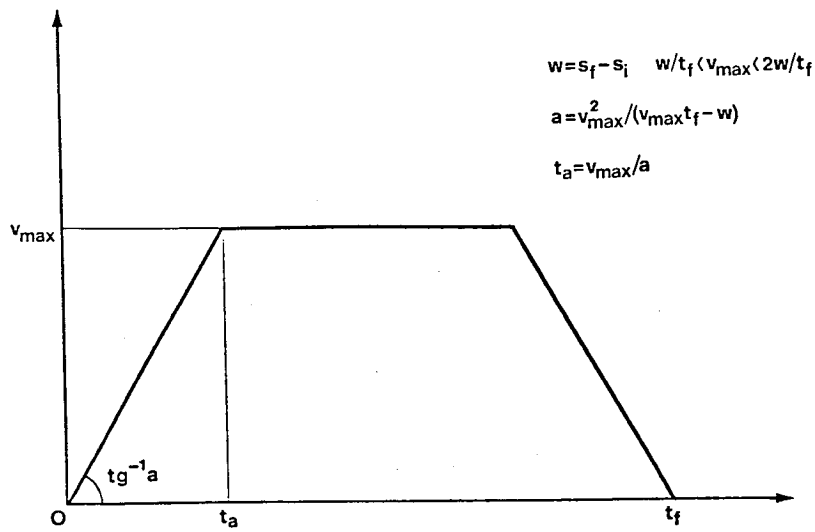


Fig. 6.15

Trajectory	t_f [s]	$\ \dot{\hat{p}}\ _{\max}$ [m/s]	$\dot{\hat{\alpha}}_{\max}$ [°/s]	$\dot{\hat{\beta}}_{\max}$ [°/s]	$\dot{\hat{\gamma}}_{\max}$ [°/s]
1	1	.75	0	0	0
	5	.15	0	0	0
2	1	.75	0	135	0
	5	.15	0	27	0

Tab. 6.2

Le Figg. 6.16 e 6.18 mostrano gli errori di posizione $\|e_p\|$, mentre le Figg. 6.17 e 6.19 mostrano gli errori di orientamento maggiori tra $e_s = \cos^{-1}(\hat{s}^T s)$ ed $e_a = \cos^{-1}(\hat{a}^T a)$. Essendo le condizioni iniziali nulle, gli errori di inseguimento si mantengono molto contenuti, ed a regime si hanno errori praticamente nulli, in virtù della struttura a ciclo chiuso degli schemi di inversione cinematica di Figg. 6.5 e 6.6. Anche qui, come nell'esempio precedente, si ha che gli errori di inseguimento aumentano all'aumentare delle velocità, ma ciò trova verifica nell'impiego pratico di un robot.

E' interessante notare come, per la seconda traiettoria, i risultati delle simulazioni dimostrano che non vi è alcun problema nell'intorno della singolarità. Ciò è dovuto al fatto che la singolarità fa parte della traiettoria, laddove è già stato sottolineato in precedenza che, nel caso in cui la traiettoria passi in prossimità della singolarità, ma senza attraversarle, si hanno naturalmente delle velocità più elevate e, di conseguenza, delle prestazioni in inseguimento ridotte.

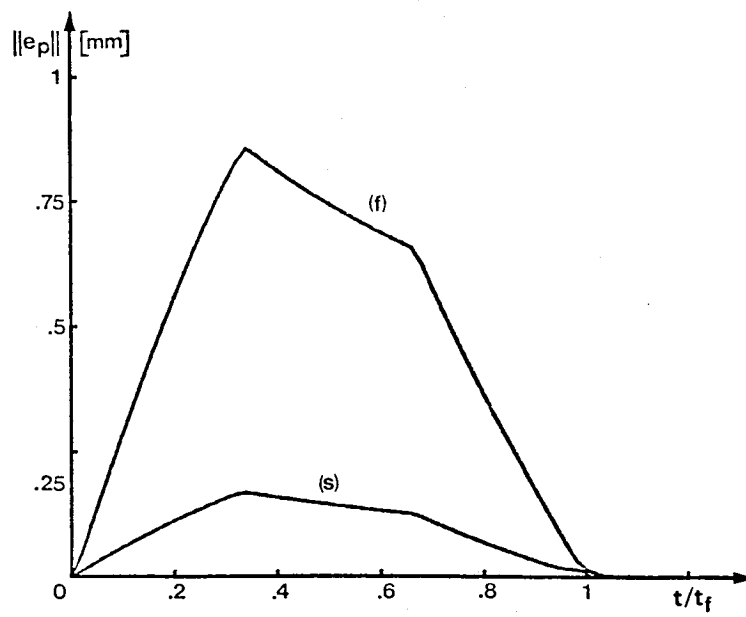


Fig. 6.16

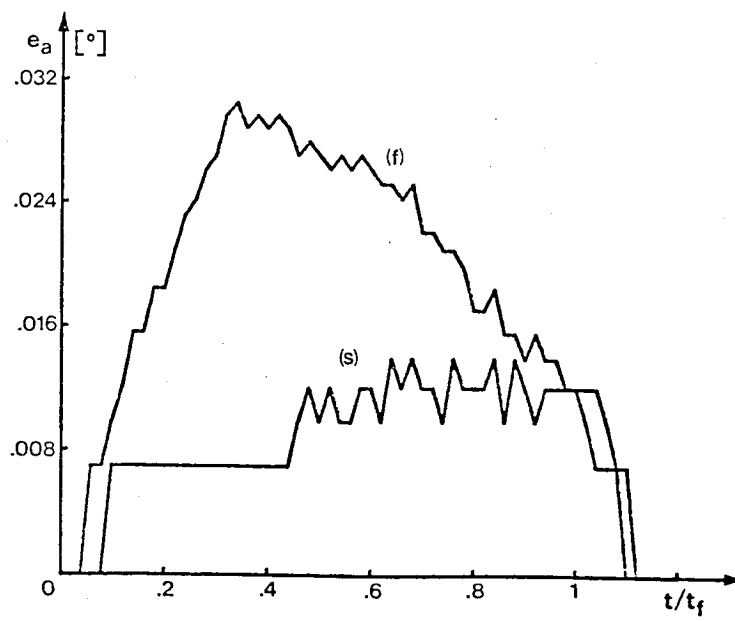


Fig. 6.17

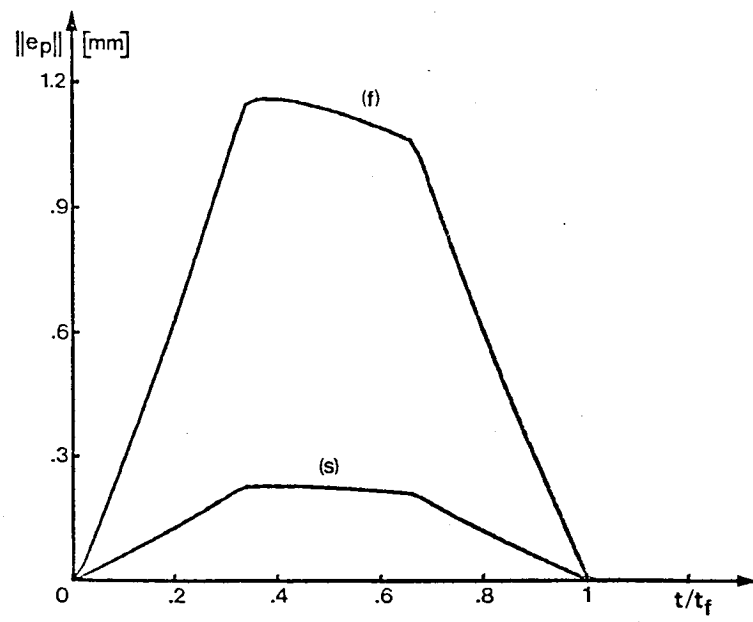


Fig. 6.18

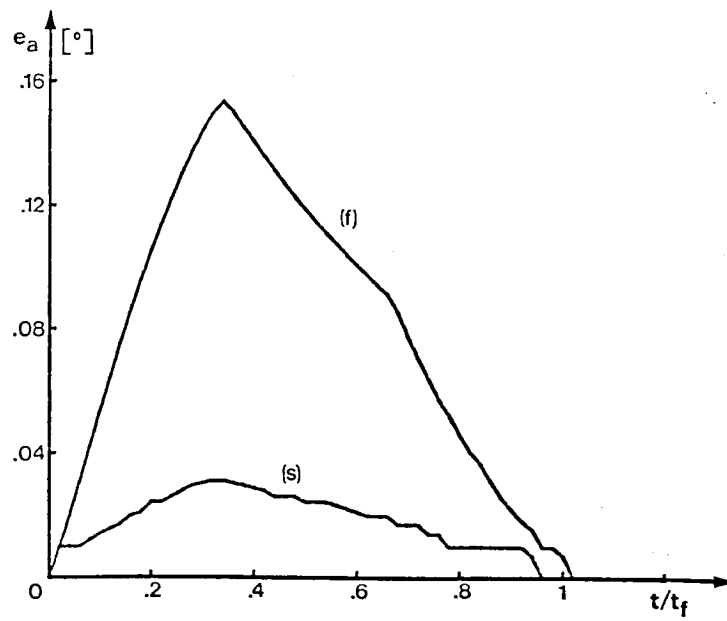


Fig. 6.19

Bibliografia

- [1] R.P. Paul, B. Shimano and G.E. Mayer, "Kinematic control equations for simple manipulators," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 11, 6, June 1981.
- [2] H. Asada and J.-J.E. Slotine, Robot Analysis and Control, Wiley, 1986.
- [3] V.J. Lumelski, "Iterative coordinate transformation procedure for one class of robots," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 14, 3, May/June 1984.
- [4] J. Denavit and R.S. Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices," ASME J. Appl. Mech., 22, June 1955.
- [5] G. De Maria, L. Sciavicco and B. Siciliano, "A general solution algorithm to coordinate transformation for robotic manipulators," '85 ICAR, Tokyo, Japan, Sept. 1985.
- [6] A. Balestrino, G. De Maria, L. Sciavicco and B. Siciliano, "A novel approach to coordinate transformation for robotic manipulators," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., publ. pending, 1986.
- [7] L. Sciavicco and B. Siciliano, "Coordinate transformation: A solution algorithm for one class of robots," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 16, 4, July/Aug. 1986.
- [8] D.L. Pieper, "The kinematics of manipulators under computer control," Ph.D. Thesis, Stanford University, 1968.
- [9] R.P. Paul, Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control, MIT Press, 1982.
- [10] G. De Maria and R. Marino, "A discrete algorithm for solving the inverse kinematic problem for robotic manipulators," '85 ICAR, Tokyo, Japan, Sept. 1985.
- [11] M. Takano, "A new effective solution for inverse kinematics problem (synthesis) of a robot with any type of configuration," J. Fac. Eng., Univ. Tokyo, 38, 2, 1985.

7. IL CASO DEI MANIPOLATORI RIDONDANTI

7.1 Il concetto di ridondanza cinematica

Si è visto nel Capitolo 4 che per un manipolatore a sei gradi di libertà vi è un numero finito di soluzioni all'equazione cinematica. Per quel che riguarda poi il controllo cinematico, si è visto che la soluzione è unica se la configurazione del manipolatore non è singolare. Tuttavia, quando un manipolatore ha più di sei gradi di libertà, si possono trovare un numero infinito di soluzioni, le quali comportano tutte lo stesso moto assegnato all'organo terminale. Si consideri ad es. il braccio umano, che ha sette gradi di libertà escludendo le dita. Come già anticipato nel § 4.1, quando la mano è posizionata sul tavolo con posizione ed orientamento fissi, si può variare in maniera continua la posizione del gomito senza muovere affatto la mano. Ciò implica che esiste un certo rapporto di velocità ai giunti che non comportano alcuna velocità alla mano, ovvero il contributo di tale rapporto di velocità ai giunti alla velocità risultante del punto terminale è nullo. Anche nel caso in cui tali velocità fossero sovrapposte ad altre velocità ai giunti, la velocità risultante all'organo terminale sarebbe la stessa. Di conseguenza, è possibile trovare più di una soluzione all'equazione cinematica differenziale (3.30) corrispondente alla stessa velocità dell'organo terminale. In tale paragrafo, si analizzeranno le proprietà fondamentali di tale equazione allorché si hanno gradi di libertà addizionali.

Per formulare l'equazione cinematica differenziale per un generico manipolatore ad n gradi di libertà, si deve innanzitutto modificare la definizione del vettore $\underline{dx}$ che rappresenta il moto dell'organo terminale. Nella (3.28), $\underline{dx}$ era stato definito come un vettore (6×1) rappresentativo della

traslazione e della rotazione infinitesimali dell'organo terminale. Tuttavia, il numero di variabili che bisogna specificare per eseguire un certo compito non coincide necessariamente con sei. Così ad es. nella saldatura ad arco, basta controllare solamente le cinque variabili indipendenti del moto della torcia. Poiché di solito la torcia è simmetrica rispetto al suo asse centrale, l'orientamento della torcia attorno a tale asse risulta del tutto arbitrario. Pertanto, per un'operazione di saldatura ad arco, sono sufficienti solo cinque gradi di libertà. In generale quindi si può descrivere il moto dell'organo terminale a mezzo di m variabili indipendenti che caratterizzano il compito da eseguire. Sia $\underline{dx} = (dx_1 \dots dx_m)^T$ il vettore ($m \times 1$) degli spostamenti infinitesimali dell'organo terminale; l'equazione cinematica differenziale per un generico manipolatore ad n gradi di libertà risulta data da

$$\underline{dx} = J \underline{dq} \quad (7.1)$$

ove la dimensione dello Jacobiano del manipolatore è ($m \times n$). Quando n è maggiore di m e J è di rango pieno, vi sono $(n-m)$ variabili arbitrarie nella soluzione generale della (7.1). In tal caso si dice che il manipolatore possiede $(n-m)$ gradi di libertà ridondanti nei riguardi del compito assegnato.

La matrice Jacobiana determina anche la relazione tra la velocità all'organo terminale $\underline{x}$ e le velocità ai giunti $\underline{q}$,

$$\dot{\underline{x}} = J \dot{\underline{q}} \quad (7.2)$$

L'equazione (7.2) può vedersi come la trasformazione lineare dallo spazio dei vettori V^n allo spazio V^m . Per caratterizzare la soluzione dell'equazione (7.2), si consideri il diagramma di trasformazione lineare illustrato in Fig. 7.1. Il sottospazio $R(J)$ in figura è il range della trasformazione

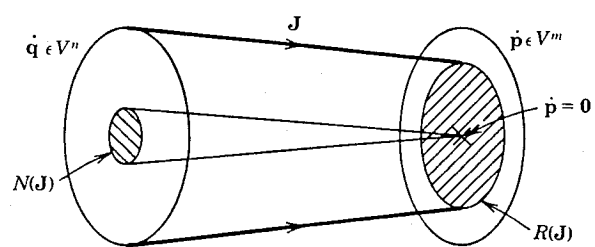


Fig. 7.1

lineare. Il range è lo spazio di tutte le possibili velocità dell'organo terminale che possono venir generate dagli n giunti nella configurazione corrente del manipolatore. Se J è una matrice di pieno rango, il range descrive l'intero spazio V^m . In caso contrario, esiste almeno una direzione nella quale l'organo terminale non può essere mosso. Il sottospazio $N(J)$ di Fig. 7.1 è il nullo della trasformazione lineare. Ogni elemento in tale sottospazio è trasformato nel vettore nullo in V^m : $J\dot{\underline{q}} = \underline{0}$. Pertanto, ogni vettore velocità ai giunti $\dot{\underline{q}}$ che appartenga allo spazio nullo non produce alcuna velocità all'organo terminale. Si ricordi il braccio umano discusso sopra: il gomito può muoversi senza spostare la mano, ovvero le velocità ai giunti per tale movimento sono nello spazio nullo, poiché non si induce alcun movimento all'organo terminale. Se lo Jacobiano del manipolatore è di pieno rango, la dimensione dello spazio nullo, $\dim N(J)$, è pari al numero dei gradi di libertà ridondanti ($n-m$). Quando lo Jacobiano degenera, ovvero non è di pieno rango, la dimensione del range, $\dim R(J)$ diminuisce, ed allo stesso tempo aumenta la dimensione del nullo in ragione della stessa quantità. Si comprende quindi come la somma delle due dimensioni è sempre pari ad n ,

$$\dim R(J) + \dim N(J) = n \quad (7.3)$$

Sia $\dot{\underline{q}}^*$ una soluzione della (7.2) e $\dot{\underline{q}}_0$ un vettore nello spazio nullo; il vettore $\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}^* + k\dot{\underline{q}}_0$ è anch'esso soluzione della (7.2), ove k è uno scalare arbitrario. Infatti

$$J\dot{\underline{q}} = J\dot{\underline{q}}^* + kJ\dot{\underline{q}}_0 = J\dot{\underline{q}}^* = \dot{\underline{x}} \quad (7.4)$$

Dal momento che il secondo termine $k\dot{\underline{q}}_0$ può essere scelto in maniera arbitraria nello spazio nullo, esiste un numero infinito di soluzioni all'equazione lineare, a meno che la

dimensione del nullo non sia 0. Quindi il nullo è indicativo proprio dell'arbitrarietà delle soluzioni, e si può affermare che la soluzione all'equazione lineare possiede tanti parametri arbitrari quanta è la dimensione del nullo.

7.2 Soluzioni ottime

In tale paragrafo si vuole trovare una soluzione ottima alla (7.2). Si fissi lo Jacobiano del manipolatore in un'opportuna configurazione del manipolatore; si vuole trovare la soluzione ottima all'equazione lineare (7.2), nell'ipotesi che la matrice Jacobiana sia di pieno rango. Si consideri quindi la funzione quadratica dei costi del vettore velocità ai giunti,

$$g(\dot{\underline{q}}) = \dot{\underline{q}}^T W \dot{\underline{q}} \quad (7.5)$$

ove W è una matrice peso simmetrica ($n \times n$) definita positiva. Il problema è quello di trovare $\dot{\underline{q}}$ che soddisfa la (7.2) per un dato $\underline{\dot{x}}$ e J , e che minimizza la funzione di costo $g(\dot{\underline{q}})$. Tale problema può essere risolto con i moltiplicatori di Lagrange. A tale scopo si consideri la funzione costo modificata

$$g(\dot{\underline{q}}, \underline{\lambda}) = \dot{\underline{q}}^T W \dot{\underline{q}} - \underline{\lambda}^T (J \dot{\underline{q}} - \underline{\dot{x}}) \quad (7.6)$$

ove $\underline{\lambda}$ è un vettore incognito ($m \times 1$) di moltiplicatori di Lagrange. Le condizioni necessarie affinché si abbia una soluzione ottima sono

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{\underline{q}}} = \underline{0}, \text{ ovvero } 2W\dot{\underline{q}} - J^T \underline{\lambda} = \underline{0} \quad (7.7)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{0}, \text{ ovvero } J\dot{\underline{q}} - \dot{\underline{x}} = \underline{0} \quad (7.8)$$

che è proprio la (7.2). Essendo W invertibile, dalla (7.7) si ottiene

$$\dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} W^{-1} J^T \underline{\lambda} \quad (7.9)$$

Sostituendo nella (7.8) si ha

$$(JW^{-1}J^T)\underline{\lambda} = 2\dot{\underline{x}} \quad (7.10)$$

Poiché si è supposto che J è di pieno rango, il prodotto matriciale $JW^{-1}J^T$ è una matrice quadrata di pieno rango, ed è pertanto invertibile. Eliminando quindi il vettore dei moltiplicatori di Lagrange $\underline{\lambda}$ dalle equazioni (7.9) e (7.10), si ottiene la soluzione ottima

$$\dot{\underline{q}} = W^{-1}J^T(JW^{-1}J^T)^{-1}\dot{\underline{x}} \quad (7.11)$$

Ovviamente, la soluzione ottima soddisfa l'equazione di partenza (7.2); se si moltiplica infatti la (7.11) per lo Jacobiano J si ottiene proprio la (7.2). Quando la matrice dei pesi W è la matrice identità ($m \times m$), la soluzione ottima si riduce a [1]

$$\dot{\underline{q}} = J^T(JJ^T)^{-1}\dot{\underline{x}} \quad (7.12)$$

La matrice prodotto $J^\dagger = J^T(JJ^T)^{-1}$ è nota come pseudoinversa della matrice Jacobiana J .

7.3 Il problema cinematico inverso di manipolatori ridondanti

Il numero dei gradi di libertà ridondanti di un manipolatore, in relazione ad un compito assegnato, può essere convenientemente sfruttato per ottenere un manipolatore più versatile in termini della sua configurazione cinematica corrente e della sua interazione con l'ambiente in cui esso opera [2]. Lo spazio delle soluzioni ridondanti può essere utilizzato per portare in conto dei vincoli addizionali sul moto del manipolatore oppure per ottimizzare opportuni indici di prestazione. In particolare, per un manipolatore ridondante si possono avere vincoli sulle corse dei giunti meccanici e/o, nel caso in cui siano presenti ostacoli nell'ambiente, si possono ottenere traiettorie nello spazio dei giunti che evitino la collisione con questi ultimi. E' da auspicarsi poi che un manipolatore ridondante possa operare nella configurazione ai giunti più 'destra' dal punto di vista cinematico. Queste, e forse ancora altre motivazioni, stanno spingendo la ricerca in robotica verso lo studio dei manipolatori ridondanti, per sfruttarne i vantaggi che questi potenzialmente offrono.

Il problema cruciale per l'analisi, e quindi per il controllo di un manipolatore ridondante, rimane quello della sua inversione cinematica. Nel paragrafo precedente si è visto come una soluzione ottima, adottando una tecnica di controllo cinematico [1], può ottenersi con l'uso della pseudoinversa della matrice Jacobiana. Dal momento che il consumo di energia è legato alla norma delle velocità ai giunti e la pseudoinversa determina la soluzione a norma minima, si viene a minimizzare la potenza istantanea.

La soluzione ottima (7.12) può essere modificata dall'aggiunta di un termine addizionale come

$$\dot{\underline{q}} = \underline{J}^{\dagger} \dot{\underline{x}} + (\underline{I} - \underline{J}^{\dagger} \underline{J}) \underline{z} \quad (7.13)$$

ove è immediato verificare che, premoltiplicando la (7.13) per lo Jacobiano J , si ottiene proprio la (7.2). L'operatore proiezione $(I - J^T J)$ seleziona quelle componenti di $\underline{z}$ che appartengono allo spazio delle soluzioni omogenee alla (7.2); quindi $\underline{z}$ può venire utilizzato allo scopo di ottimizzare una funzione addizionale.

In [4] è stato proposto di scegliere il vettore $\underline{z}$ nella (7.13) come

$$\underline{z} = \alpha \nabla h(\underline{q}) \quad (7.14)$$

ove α è una costante di guadagno, ed $h(\underline{q})$ è un indice di prestazione da ottimizzare. Se q_{ci} è la posizione centrale della corsa meccanica del giunto i e δq_i è l'escursione massima da un lato rispetto al centro, la funzione obiettivo h può essere scelta come

$$h = \sum_{i=1}^n ((q_i - q_{ci}) / \delta q_i)^2 \quad (7.15)$$

la quale fornisce una configurazione 'destra' nelle variabili di giunto, poiché distribuisce in maniera eguale il moto tra i giunti, sì da avere una configurazione 'naturale', minimizzando la possibilità che un giunto raggiunga uno stop meccanico di fine corsa.

In [3] quindi è stato proposto di scegliere una funzione h diversa, basata sulla definizione di minima p -norma, invece della norma a minimi quadrati della (7.15). In definitiva l'aggiunta di soluzioni omogenee nel vettore velocità, come nella (7.13), fornisce un compromesso tra minima energia ed ottimizzazione di una condizione ausiliaria.

Come già anticipato, uno dei vantaggi potenziali di un manipolatore ridondante è l'uso dei gradi di libertà ridondanti per effettuare delle operazioni di manipolazione in un

ambiente di lavoro ricco di ostacoli, evitandone il contatto. L'abilità del braccio umano di operare in tali ambienti forse rappresenta il modello ideale di tale abilità. Per realizzare tale funzione, si necessita di un piano di coordinazione del movimento dei giunti in modo da evitare gli ostacoli durante l'esecuzione del compito desiderato.

La programmazione di una traiettoria dell'organo terminale fra due punti desiderati così da evitare ostacoli lungo il cammino ha ricevuto inizialmente l'attenzione dei ricercatori [5-6]. In seguito, ci si è rivolti al vero problema del controllo cinematico. Ad es. in [7] si individua una posizione nominale nello spazio dei giunti libera da ostacoli, ed il termine omogeneo della soluzione (7.13) rappresenta la velocità verso tale posizione.

L'approccio proposto in [2] forse è quello più interessante dal punto di vista realizzativo, poiché comporta un algoritmo che si basa sulle informazioni ricevute da sensori di prossimità, operando in un ambiente la cui configurazione varia nel tempo. Più in particolare, in ogni istante di tempo si determina quale è il punto lungo la struttura del manipolatore che risulta più prossimo all'ostacolo, e gli si assegna una velocità che lo allontana dall'ostacolo. Di conseguenza la soluzione $\dot{\mathbf{q}}$ deve soddisfare anche il vincolo

$$\mathbf{J}_0 \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (7.16)$$

ove $\mathbf{x}_0$ sono le coordinate di tale punto e $\mathbf{J}_0$ è lo Jacobiano per tale punto. Pertanto, una maniera possibile di trovare una soluzione comune alle (7.2) e (7.16) è quella di considerare la matrice Jacobiana formata dalla $\mathbf{J}$ e dalla $\mathbf{J}_0$, associare $\dot{\mathbf{x}}$ ed $\dot{\mathbf{x}}_0$ per ottenere una singola equazione matriciale.

Se il rango di $\mathbf{J}_0$ è pari al numero di gradi di libertà ridondanti del manipolatore, il sistema è completamente specificato dal punto di vista matematico e non risulta più

ridondante. Se invece la matrice risultante da J e J_0 non è quadrata o non di pieno rango, si può nuovamente applicare una soluzione di tipo pseudoinverso per ottenere la migliore soluzione approssimata. In [2] poi si discutono gli aspetti relativi alla scelta di opportune soglie per la rivelazione dei punti più vicini ad un ostacolo, in relazione alla portata dei sensori di prossimità adottati.

Sempre in [2] poi, si affronta il problema della destrezza di un manipolatore e si passano in rassegna diverse misure di destrezza proposte in letteratura, fornendo anche un esempio di applicazione utile a comparare le diverse misure. La più immediata è quella basata sul determinante dello Jacobiano [8], se il manipolatore non è ridondante, ovvero sul determinante di JJ^T [7], se è ridondante. Alternativamente si può pensare di adottare la decomposizione in valori singolari di una matrice non quadrata [7]. Infine il "numero di condizione" di una matrice, pari al rapporto tra il minimo ed il massimo valore singolare della matrice, è stato raccomandato come misura della destrezza di un manipolatore.

Meritano una citazione, inoltre, i metodi di soluzione che fanno uso delle inverse generalizzate, del tipo della (7.11), per la minimizzazione del consumo energetico degli attuatori [9], e per lo scansamento degli ostacoli, anch'esso basato, come il metodo sopra descritto [2], sull'individuazione di quel punto lungo la struttura a distanza minima dall'ostacolo [10].

Infine, sempre per l'inversione cinematica di un manipolatore ridondante, è da ricordare la tecnica iterativa basata su un algoritmo di ottimizzazione per un sistema lineare vincolato (vincoli sulla corsa dei giunti), che fa uso di un metodo di Newton-Raphson modificato [11].

7.4 Estensione dell'algoritmo ai manipolatori ridondanti

L'obiettivo di tale paragrafo è mostrare come l'algoritmo generale di soluzione illustrato nel § 6.2 possa venire esteso al caso di manipolatori ridondanti, incorporando sistematicamente vincoli sulle variabili di giunto e/o vincoli dovuti alla presenza di ostacoli nello spazio di lavoro del manipolatore. La chiave è quella di valutare una funzione cinematica diretta opportunamente estesa [12], in modo da ritenere tutti i vantaggi di cui gode la tecnica di soluzione proposta nel § 6.2, come ad es. continuità della soluzione in caso di inversione cinematica di una traiettoria, riduzione drastica dei tempi di calcolo e generazione diretta dei profili di velocità ai giunti.

Si è già più volte evidenziato come i gradi di libertà ridondanti di un manipolatore possano venire convenientemente utilizzati per risolvere il problema cinematico, nel caso siano presenti vincoli dovuti ad ostacoli o a limiti sulla corsa dei giunti. L'occorrenza di una o entrambi tali eventualità può essere incorporata sistematicamente nello schema dinamico di Fig. 5.1, a condizione di allargare opportunamente lo spazio di stato Cartesiano di $\underline{x}$.

Si può pensare cioè di definire un insieme di variabili nello spazio Cartesiano che descrivano la configurazione del manipolatore rispetto agli ostacoli nello spazio di lavoro e/o ai limiti meccanici sui giunti. L'unico requisito è quello di esprimere tali variabili in termini delle variabili di giunto, sì da ottenere un'opportuna funzione cinematica diretta estesa

$$\underline{y} = \underline{f}'(\underline{q}) \quad (7.17)$$

ove $\underline{y}$ è un vettore $((m+v) \times 1)$ con v pari al più ad $(n-m)$, ovvero al numero di gradi di libertà ridondanti, completamente specificato nello spazio del compito. A queste

condizioni, si può ottenere una soluzione alla (7.17) in maniera formalmente analoga a quella del sistema di Fig. 5.1, con il beneficio di poterla generare in linea a vantaggio del controllo nello spazio dei giunti.

Nel seguito, i due casi di presenza di ostacoli e limiti meccanici ai giunti saranno trattati separatamente, per semplicità. Cionondimeno, il risultato sarà sempre quello di estendere opportunamente il vettore definito nello spazio del compito, come nella (7.17), per poi adottare l'algoritmo di soluzione relativo al sistema di Fig. 5.1 [12].

7.4.1 Presenza di ostacoli

Si supponga che l'organo terminale di un manipolatore, nel cui spazio di lavoro siano presenti degli ostacoli, stia inseguendo una traiettoria di moto specificata nello spazio Cartesiano, e che tale traiettoria non collida con alcun ostacolo. Può accadere, tuttavia, che uno o più bracci lungo la struttura del manipolatore risultino troppo vicini ad un ostacolo, sì da ritenere probabile una collisione con l'ostacolo. L'algoritmo di inversione cinematica sopra descritto fornisce, in dipendenza della configurazione iniziale, configurazioni ai giunti che risultano adiacenti l'un l'altra, allorché l'organo terminale insegue la traiettoria desiderata. Di conseguenza, diventa necessario introdurre uno o più vincoli all'algoritmo, in modo da evitare la collisione con l'ostacolo. L'idea che segue [13] è concettualmente simile all'approccio seguito in [2] e in [10].

Si può supporre che un braccio ha evitato un ostacolo convesso, se la sua minima distanza dall'ostacolo è maggiore di una opportuna distanza di guardia opportunamente preprogrammata. Pertanto, se tutti i bracci del manipolatore soddisfano tale condizione, non vi è ragione di modificare la soluzione in corso, e l'algoritmo selezionerà una delle possibili ∞^{n-m} configurazioni, in dipendenza della

configurazione corrente e di quella iniziale.

D'altro canto, se anche una sola delle distanze di cui sopra scende al di sotto della soglia, bisogna intervenire e modificare la soluzione. Gli ostacoli possono essere in numero al più pari al numero di gradi di ridondanza del manipolatore $(n-m)$, per cui si avranno al più $(n-m)$ punti lungo la struttura del manipolatore le cui distanze dagli ostacoli interessati sono al di sotto della soglia. Per inciso si osserva che si può pensare di avere anche soglie differenti per i diversi bracci, in dipendenza degli organi di rivelazione di tali distanze adoperati, quali ad es. sensori di prossimità per i diversi bracci, telecamere, ecc.

Per comprendere il funzionamento della tecnica, tuttavia, si consideri dapprima il caso di un solo braccio e di un solo ostacolo interessati ad una collisione, tenendo presente però che tale coppia varia dinamicamente al procedere dell'organo terminale lungo la traiettoria. Si immagini così di fotografare per un attimo il braccio e l'ostacolo interessati. Sia $\underline{d}_0$ la distanza di guardia. Sia $\underline{c}$ il vettore posizione del punto sull'ostacolo più vicino al braccio. Si supponga poi di aver individuato il punto a minima distanza dall'ostacolo e sia $\underline{p}_0$ il relativo vettore posizione. Entrambi i vettori $\underline{c}$ e $\underline{p}_0$ si intendono definiti rispetto alla stessa terna base nella quale è espressa l'equazione cinematica del manipolatore. Si veda la Fig. 7.2 per un esempio planare. Se la distanza tra i due punti $\|\underline{d}_0\|$, ove $\underline{d}_0 = \underline{p}_0 - \underline{c}$, risulta minore della distanza di guardia, vi è pericolo di collisione, e le velocità ai giunti, che rappresentano gli ingressi di controllo al sistema di Fig. 5.1, devono venir modificate in accordo alla nuova situazione. In analogia con la definizione di errore (5.3), si può pensare di definire il seguente errore

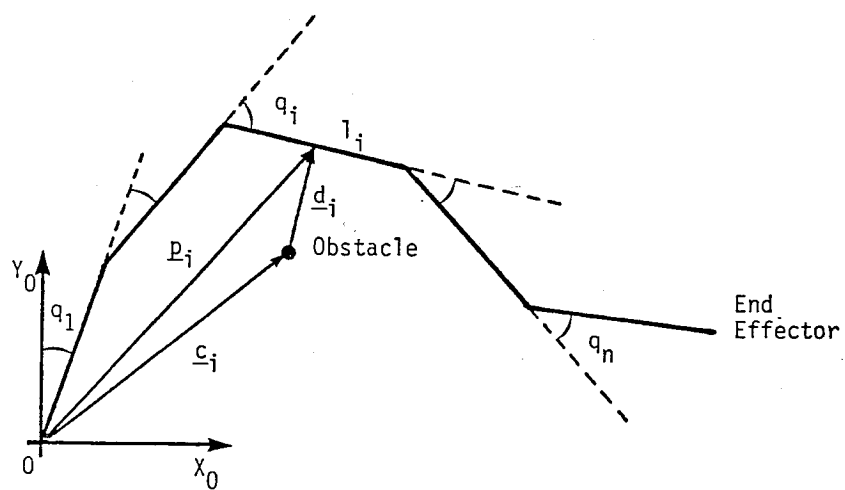


Fig. 7.2

$$e_o = \frac{1}{2}(\hat{d}_o^2 - \underline{d}_{o-o}^T \underline{d}_o) \quad (7.18)$$

Differenziandolo rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{e}_o = \hat{d}_o \dot{\hat{d}}_o - \underline{j}_{do}^T \dot{\underline{q}} \quad (7.19)$$

ove

$$\underline{j}_{do}^T = \underline{d}_o^T J_{po} \quad (7.20)$$

ove J_{po} è lo Jacobiano $\partial \underline{p}_o / \partial \underline{q}$ associato al punto $\underline{p}_o$. Se si affianca quindi la dinamica dell'errore in (7.19) a quella in (5.4), si ottiene un controllo del tutto analogo a quello in (5.7) e (5.8), in cui $\underline{e}$ sarà il nuovo vettore di errore $((m+1) \times 1)$ nello spazio Cartesiano, la cui ultima componente è la e_o definita nella (7.18), e J sarà la nuova matrice Jacobiana $((m+1) \times n)$, la cui ultima riga è la $\underline{j}_{do}^T$ definita nella (7.20).

In tal modo, non solo si garantisce l'inseguimento della traiettoria desiderata da parte dell'organo terminale, ma si fa in modo di portare a zero l'errore e_o , ovvero di riportare la distanza del braccio dall'ostacolo al valore di soglia. In realtà accade che il moto di quei gradi di libertà che determinano la posizione del punto $\underline{p}_o$ viene opportunamente frenato, impedendo al braccio di avvicinarsi ulteriormente all'ostacolo; è come se il braccio interessato alla collisione, in virtù del contributo aggiuntivo di velocità ai giunti, sia forzato a scivolare tangenzialmente lungo la sfera immaginaria con centro in $\underline{c}$ e raggio pari a $\hat{d}_o$.

Tale discorso può poi venire esteso anche ad altre coppie di punti, rispettivamente lungo la struttura del manipolatore e sull'ostacolo, fino eventualmente a coprire i gradi di libertà ridondanti a disposizione.

7.4.2 Limiti meccanici ai giunti

Concettualmente simile è l'inclusione di vincoli meccanici sulle variabili di giunto nello schema di inversione cinematica di Fig. 5.1. L'idea che segue è analoga in principio all'approccio seguito in [9]. Si supponga quindi che una variabile di giunto q_i sia meccanicamente vincolata tra due valori q_{imin} e q_{imax} , ovvero

$$q_{imin} \leq q_i \leq q_{imax} \quad (7.21)$$

Se tale variabile di giunto si avvicina ad uno dei due limiti, mentre l'organo terminale del manipolatore sta inseguendo la traiettoria specificata nello spazio Cartesiano, si può dover intervenire sulla soluzione data dallo schema di Fig. 5.1. Come in precedenza per gli ostacoli, si può pensare di definire una distanza di soglia $\hat{d}_q$ con l'intento che se la distanza della variabile di giunto dai rispettivi limiti inferiori e superiori risulta inferiore a tale soglia, bisogna modificare l'ingresso di controllo di Fig. 5.1. A tal proposito, si definisca l'errore

$$e_q = \hat{d}_q - d_q \quad (7.22)$$

ove $d_q = q_i - q_{imin}$ o $d_q = q_{imax} - q_i$, in dipendenza di quale limite sia interessato. Differenziando la (7.22) nel tempo, si ottiene

$$\dot{e}_q = \dot{\hat{d}}_q - \underline{u}_i^T \dot{q} \quad (7.23)$$

ove

$$\underline{u}_i^T = (0 \quad 0 \quad \dots \quad \pm 1 \quad \dots \quad 0) \quad (i) \quad (7.24)$$

è il vettore che seleziona la velocità del giunto interessato $\underline{q}_i$, con il segno positivo per $q_{i\min}$ e quello negativo per $q_{i\max}$. A questo punto risulta chiaro come, così come fatto in precedenza per gli ostacoli, si possa affiancare la (7.23) alla (5.4), ed eventualmente anche alla (7.19), ottenendo un controllo del tutto analogo a quello in (5.7) e (5.8), in cui $\underline{e}$ sarà il nuovo vettore errore $((m+1) \times 1$ o più nel caso di un vincolo sulla presenza di un ostacolo), la cui componente aggiuntiva è la e_q definita nella (7.23), e J sarà la nuova matrice Jacobiana $((m+1) \times n$ o più), la cui riga aggiuntiva è il vettore riga $\underline{u}_i^T$ definito nella (7.34). Così facendo, si garantisce non solo l'inseguimento di una traiettoria desiderata da parte dell'organo terminale, ed eventualmente anche lo scansamento di uno o più ostacoli, ma anche che il moto di quel grado di libertà che stava avvicinandosi al limite meccanico venga frenato ed opportunamente allontanato dal limite stesso.

Come nel caso degli ostacoli, anche qui si può pensare di includere più vincoli meccanici, fino a coprire, tenendo conto contemporaneamente di altri vincoli dovuti alla presenza di ostacoli, il numero dei gradi di libertà ridondanti a disposizione.

7.4.3 La soluzione complessiva

Sulla scorta dei risultati ricavati nei due paragrafi precedenti, si può sintetizzare ora l'algoritmo di soluzione complessivo al problema cinematico inverso di manipolatori ridondanti, nel caso di presenza di ostacoli e/o limiti meccanici ai giunti. Come anticipato nella (7.17), si considera il vettore $\underline{y}$ $((m+v) \times 1)$ definito nello spazio del compito come

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_o \\ \underline{x}_q \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

ove $\underline{x}_o$ è il vettore ($k \times 1$) le cui componenti sono le quantità del tipo $\underline{d}_o^T \underline{d}_o$ definite nel § 7.4.1, in corrispondenza di k vincoli attivi dovuti alla presenza di k ostacoli, e $\underline{x}_q$ è il vettore ($r \times 1$) le cui componenti sono del tipo $\underline{d}_q$ definite nel § 7.4.2, in corrispondenza di r vincoli attivi dovuti ad r limiti meccanici. In corrispondenza di $\underline{y}$, si ha ovviamente il vettore desiderato $\hat{\underline{y}}$ $((m+v) \times 1)$ definito nello spazio del compito come

$$\hat{\underline{y}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \hat{\underline{x}}_o \\ \hat{\underline{x}}_q \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

con ovvio significato dei vettori $\hat{\underline{x}}_o$ ($k \times 1$) ed $\hat{\underline{x}}_q$ ($r \times 1$). Si osservi che deve risultare

$$v = k + r \leq n - m \quad (7.27)$$

in modo da includere al più $(n-m)$ vincoli attivi. Il controllo in velocità risultante può scriversi come

$$\dot{\underline{q}} = \gamma J_{e-y}^T \underline{e}_y \quad (7.28)$$

ove

$$J_e = \begin{bmatrix} J \\ J_{do} \\ U \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

è la matrice Jacobiana estesa che include, oltre alla matrice Jacobiana ordinaria J , la matrice Jacobiana J_{do} ($k \times n$)

le cui righe sono i vettori riga j_{do}^T definite nella (7.20), e la matrice U ($r \times n$) le cui righe sono i vettori riga u_i^T definiti nella (7.24). Sempre nella (7.28)

$$\underline{e}_y = \begin{bmatrix} \underline{e} \\ \underline{e}_o \\ \underline{e}_q \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

è l'errore esteso nello spazio del compito che include, oltre al vettore errore ordinario $\underline{e}$, il vettore errore $\underline{e}_o$ ($k \times 1$) le cui componenti sono gli errori definiti nella (7.18), ed il vettore errore $\underline{e}_q$ ($r \times 1$) le cui componenti sono gli errori definiti nella (7.22). Infine nella (7.28)

$$\gamma = \alpha + (\underline{e}_y^T \dot{\underline{y}}) (\underline{e}_y^T J_e J_e^T \underline{e}_y)^{-1}, \quad \alpha > 0 \quad (7.31)$$

ove J_e ed $\underline{e}_y$ sono dati rispettivamente dalle (7.29) e (7.30), ed α è una costante di guadagno che determina la velocità di convergenza dell'errore $\underline{e}_y$ a zero.

Per effetto del controllo (7.28), l'organo terminale del manipolatore continua ad inseguire la traiettoria desiderata nello spazio Cartesiano, e i gradi di libertà ridondanti, tutti o in parte, vengono convenientemente sfruttati per evitare collisioni con uno o più ostacoli presenti nello spazio di lavoro del manipolatore e/o per evitare la generazione di una o più traiettorie ai giunti che violino i limiti meccanici imposti dalla corsa dei giunti.

Si ritiene opportuno concludere con alcune considerazioni riguardanti l'applicazione pratica dell'algoritmo di inversione cinematica per manipolatori ridondanti appena derivato. Sebbene, infatti, il controllo (7.28) sia alla base dell'algoritmo di soluzione, è da sottolineare come i compiti decisionali a cura di un livello di controllo gerarchico superiore siano egualmente importanti, se non cruciali, al buon funzionamento dell'algoritmo.

Per quanto riguarda la presenza di ostacoli, ad es., la distanza di guardia $\hat{d}_0$, che deve tener conto ovviamente anche dello spessore dei bracci, deve essere programmata in accordo al periodo di campionamento con il quale si aggiornano p_0 e c . I vincoli relativi ai vari ostacoli devono essere resi attivi solo in vicinanza degli ostacoli stessi, assicurando però un margine di sicurezza. Per di più, allo scopo di non introdurre discontinuità nelle variabili di controllo, si può pensare di scegliere il guadagno nella (7.28) in funzione delle distanze dei bracci dagli ostacoli, sì da avere pesi maggiori a distanze minori e viceversa. Considerazioni del tutto analoghe sono valide poi per quel che concerne la scelta adeguata della distanza $\hat{d}_q$.

In definitiva si può concludere affermando che la programmazione del compito (traiettoria + attivazione dei vincoli) da eseguire per un manipolatore ridondante, che opera in un ambiente di lavoro con ostacoli e che abbia dei vincoli meccanici sulla corsa dei giunti, deve avvenire sulla base di scelte adeguate, ma la risposta a tale problema è da ricercare ad un livello superiore in una struttura di controllo gerarchica del manipolatore. Il punto che si è voluto mettere in evidenza qui è che, una volta risolto il problema della programmazione del compito, l'algoritmo di inversione cinematica basato sul controllo (7.28) fornisce la traiettoria nello spazio dei giunti, in posizione e velocità, con tempi di calcolo estremamente ridotti, proprio come avveniva per i manipolatori non ridondanti; lo schema di inversione, infatti, è sostanzialmente lo stesso di quello in Fig. 5.1.

7.5 Un esempio

Allo scopo di valutare le prestazioni dell'algoritmo di inversione cinematica per manipolatori ridondanti derivato

nel precedente paragrafo, nel seguito si sviluppa un semplice esempio [13]. Si consideri un manipolatore planare del tipo di quello in Fig. 7.2 a quattro gradi di libertà. Le lunghezze dei bracci sono state scelte uguali fra di loro e pari ad $l = .3$ m. La traiettoria di riferimento sia una retta dal punto $\hat{p}(0) = (.5598 \ - .15)^T$ m al punto $\hat{p}(T) = (.8 \ - .2)^T$ m con T pari a 3 sec.; il profilo di velocità scelto è quello tipico trapezoidale con $\|\dot{\hat{p}}\|_{\max} = .12$ m/sec. Si supponga poi che la configurazione iniziale del manipolatore sia tale da posizionare $p(0)$ in $\hat{p}(0)$. Si ricordi tuttavia che le traiettorie risultanti ai giunti dipenderanno dalla configurazione iniziale, poiché l'algoritmo progredisce per continuità lungo la traiettoria assegnata. Pertanto, le condizioni iniziali sulle variabili di giunto siano $\underline{q}(0) = (180 \ -30 \ -90 \ -30)^T$.

Si introducano poi due vincoli del tipo sopra descritto. Si localizzi un ostacolo in $\underline{c} = (.7 \ - .28)^T$ m, e si abbia un limite meccanico sul quarto giunto come $q_3 \leq -80^\circ$.

Si sono eseguiti quattro tipi diversi di simulazioni. Le Figg. 7.3-7.12 illustrano i risultati ottenuti. Il periodo di campionamento scelto è di 1 msec: tale è stato ritenuto sufficiente al computo delle operazioni necessarie, a condizione di adottare un sistema a microprocessore dedicato con moltiplicatore hardware. L'errore di inseguimento è stato valutato come la norma del vettore errore di posizione $\underline{e} = \hat{p} - p$.

Nel primo insieme di simulazioni, si è applicato un controllo che tenga conto solo della traiettoria assegnata all'organo terminale, ma di nessun vincolo. Dai risultati emerge che il manipolatore viola entrambi i vincoli, nel tentativo di inseguire la traiettoria desiderata. Dalla Fig. 7.3, infatti, si vede come l'errore di inseguimento sia piccolo, ma il quarto braccio è interessato ad una collisione con l'ostacolo (Fig. 7.4) ed il terzo giunto oltrepassa il limite meccanico in -80° (Fig. 7.7).

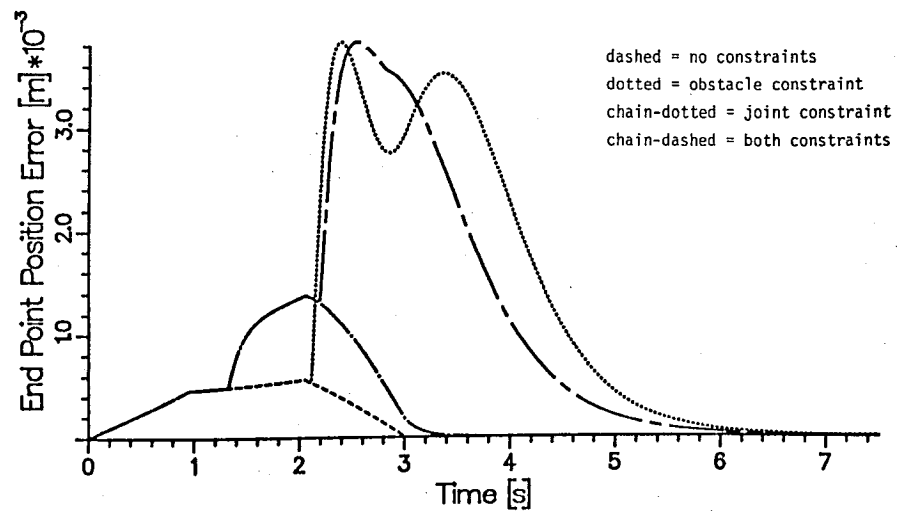


Fig. 7.3

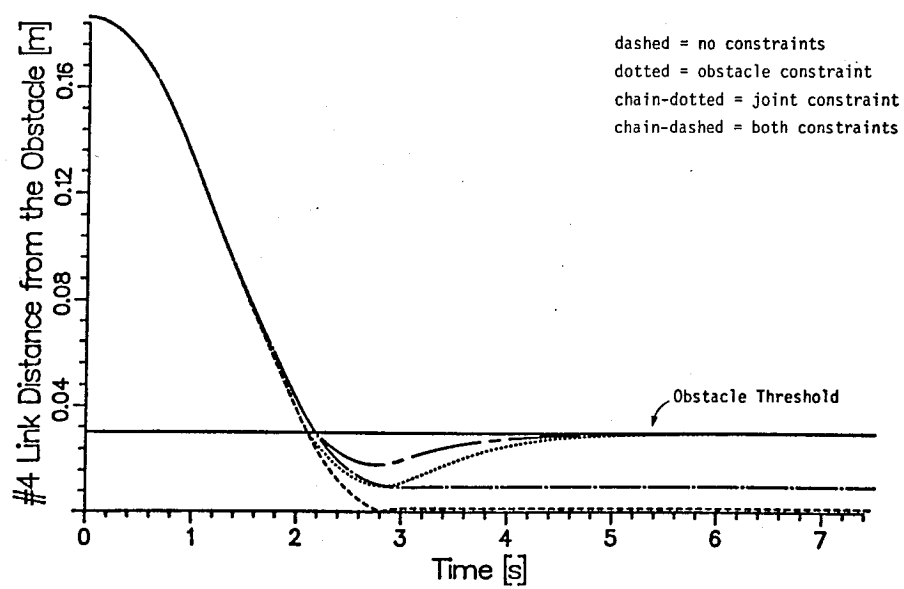


Fig. 7.4

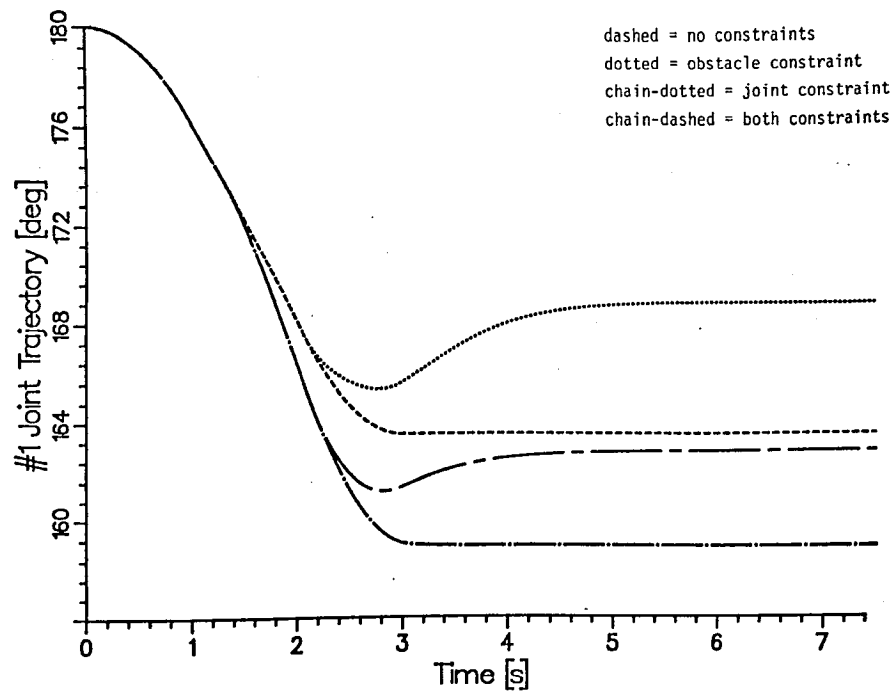


Fig. 7.5

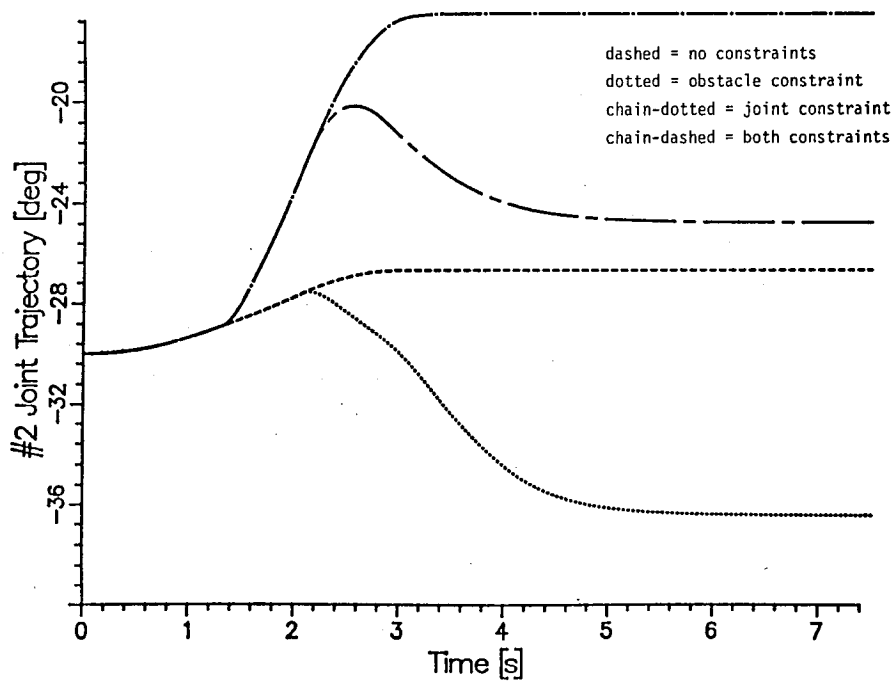


Fig. 7.6

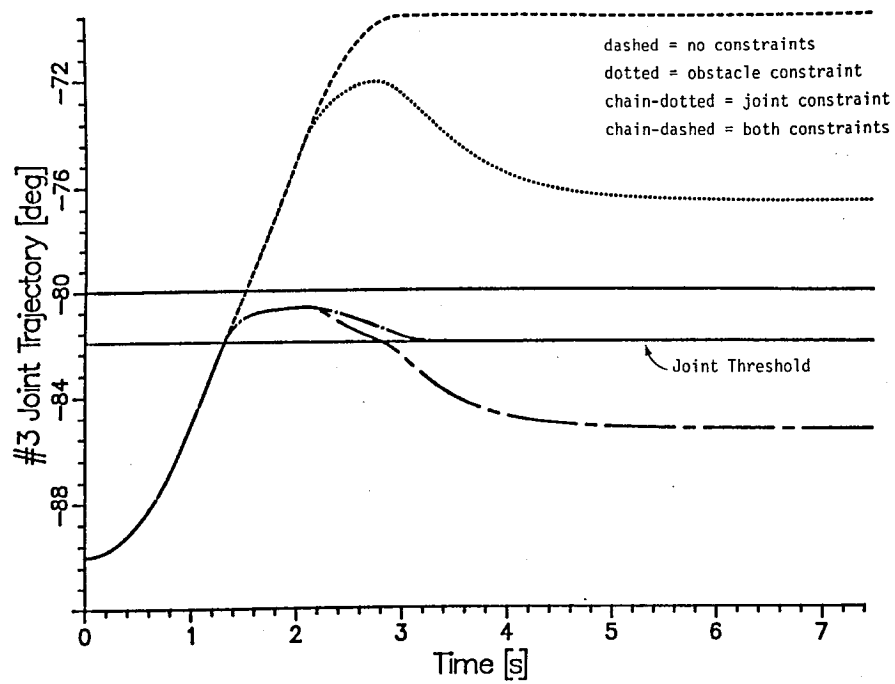


Fig. 7.7

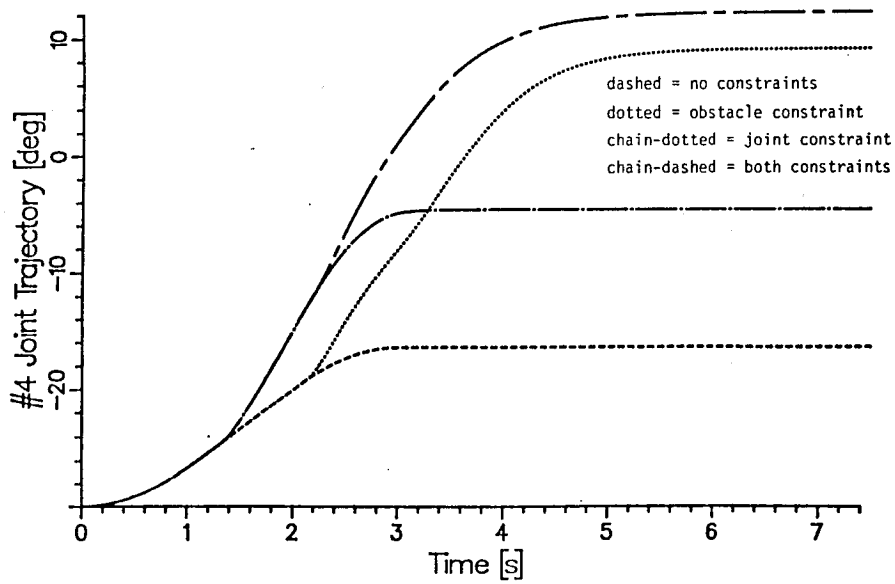


Fig. 7.8

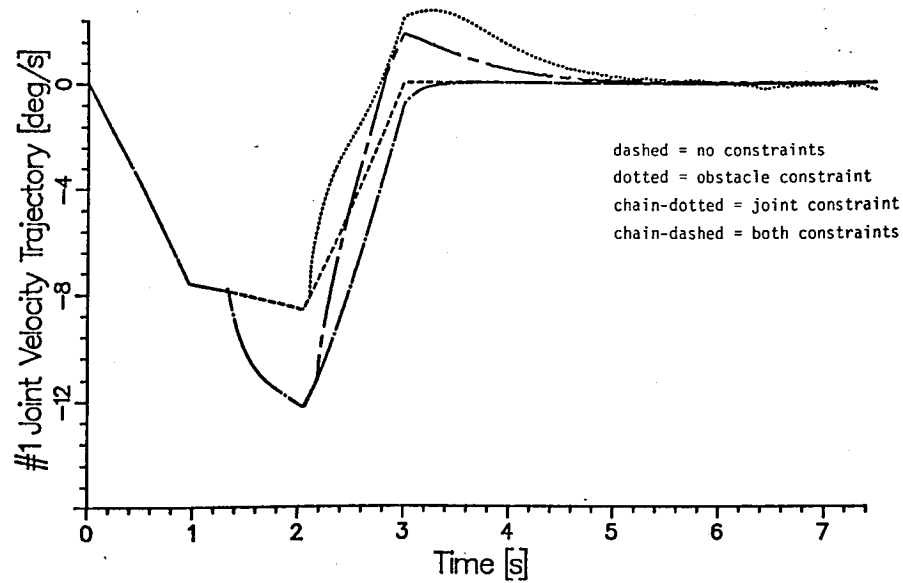


Fig. 7.9

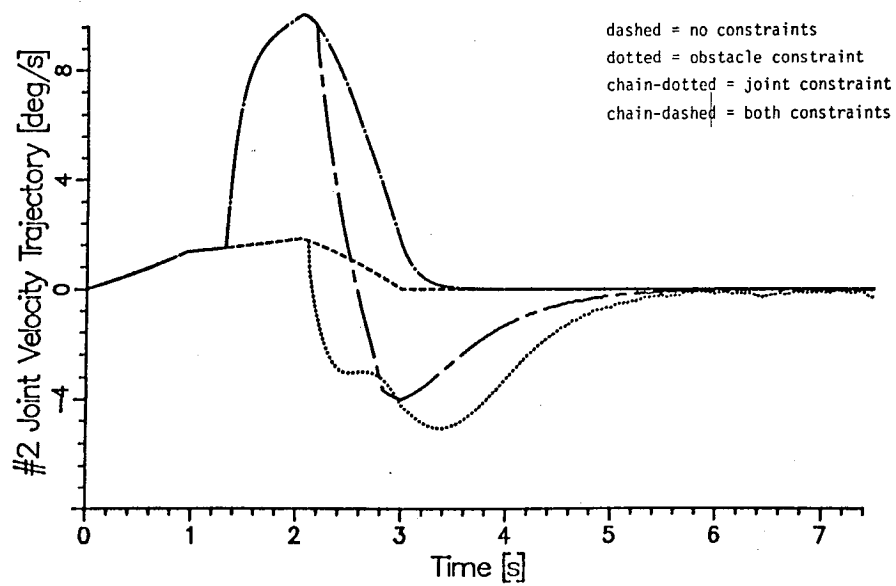


Fig. 7.10

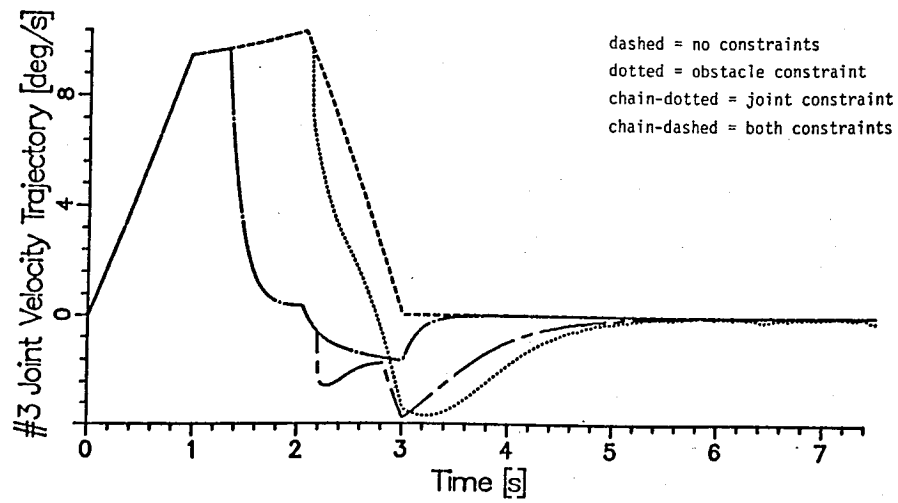


Fig. 7.11

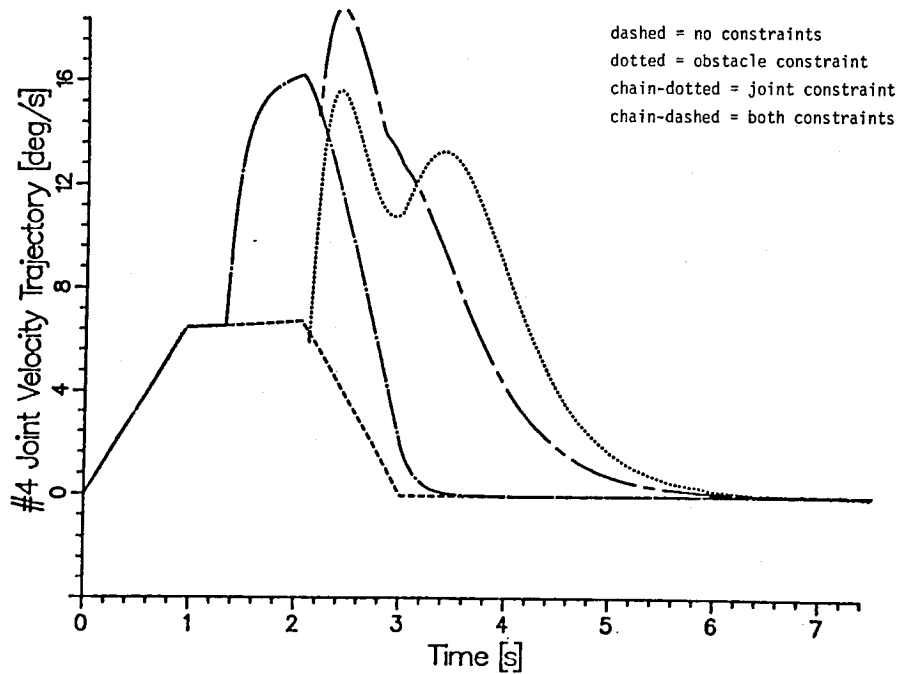


Fig. 7.12

Nel secondo insieme di simulazioni, si è tenuto conto del solo vincolo sull'ostacolo; in proposito la distanza di soglia è stata scelta pari a .03 m. Si può osservare come le prestazioni in inseguimento rimangano soddisfacenti (Fig. 7.3), ed allo stesso tempo l'ostacolo è evitato (Fig. 7.4), nel senso che la norma della distanza del quarto braccio dall'ostacolo, dopo essere divenuta più piccola della distanza di soglia, tende asintoticamente a tale valore, come dimostrato in teoria. Il vincolo sul terzo giunto, tuttavia, è ancora violato (Fig. 7.7).

Nel terzo insieme di simulazioni, si è invece tenuto conto del solo vincolo sul limite meccanico al terzo giunto; la distanza di soglia è stata fissata a 2° . Come per il caso precedente, l'inseguimento è ancora soddisfacente (Fig. 7.3), e il terzo giunto viene frenato dall'oltrepassare lo stop meccanico (Fig. 7.7), nel senso che la variabile del terzo giunto, dopo aver passato la soglia fissata a -82° , vi tende asintoticamente, come anticipato in teoria. Il vincolo sull'ostacolo è violato tuttavia (Fig. 7.4).

Infine, il controllo applicato ha tenuto conto di entrambi i vincoli, e si può constatare come si ottenga un inseguimento soddisfacente (Fig. 7.3), ed entrambi i vincoli, una volta attivati, siano soddisfatti asintoticamente (Fig. 7.4 e 7.7).

Un punto cruciale da sottolineare è che le distanze di soglia sono da intendersi come introdotte per fornire dei margini di sicurezza dai limiti veri e propri, la posizione dell'ostacolo e lo stop meccanico rispettivamente. Di fatto, se si provasse ad aumentare il valore del guadagno nella (7.28), si aumenterebbe la velocità di convergenza alle soglie stesse, al prezzo però di accettare discontinuità, ed eventualmente ampiezze troppo elevate, non desiderate, nei profili di velocità ai giunti. Tale effetto risulterebbe così dannoso allo scopo del controllo dinamico dei giunti. Si intuisce quindi come, ancora una volta, la scelta vada

fatta sulla base di un compromesso tra soglie e guadagno (ampiezza delle velocità ai giunti); le soglie vanno scelte abbastanza ampie da consentire valori di guadagno ragionevoli e quindi profili di velocità 'dolci'. Tale punto si riflette nella scelta delle soglie e dei valori di guadagno nelle simulazioni appena illustrate e, come si può constatare, i profili di velocità risultanti hanno forme gentili ed ampiezze contenute.

Al limite, infine, se si programmassero i valori del guadagno in funzione delle distanze, si potrebbe cercare di ottenere soglie strette con velocità di risposta elevata, ma allo stesso tempo profili di velocità più dolci.

Bibliografia

- [1] D.E. Whitney, "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses," IEEE Trans. Man-Mach. Syst., 10, 2, June 1969.
- [2] C.A. Klein, "Use of redundancy in the design of robotic systems," 2nd Int. Symp. Rob. Res., Kyoto, Japan, Aug. 1984.
- [3] C.A. Klein and C.H. Huang, "Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 13, 3, March/Apr. 1983.
- [4] A. Liegeois, "Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 7, 12, Dec. 1977.
- [5] R.A. Brooks, "Solving the find-path problem by good representation of free space," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 13, 2, March/Apr. 1983.
- [6] T. Lozano-Pérez, "Automatic planning of manipulator transfer movements," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 11, 10, Oct. 1981.
- [7] T. Yoshikawa, "Analysis and control of robot manipulators with redundancy," 1st Int. Symp. Rob. Res., Bretton Woods, NH, Aug. 1983.
- [8] R.P. Paul and C.N. Stevenson, "Kinematics of robot wrists," Int. J. Rob. Res., 2, 1, Winter 1983.
- [9] M. Vukobratovic and M. Kircanski, "A dynamic approach to nominal trajectory synthesis for redundant manipulators," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 14, 4, July/Aug. 1984.
- [10] M. Kircanski and M. Vukobratovic, "Trajectory planning for redundant manipulators in the presence of obstacles," 5th CISM-IFTOMM Ro.Man.Sy, Udine, Italy, June 1984.
- [11] B. Benhabib, A.A. Goldenberg and R.G. Fenton, "A solution to the inverse kinematics of redundant manipulators," 1985 ACC, Boston, MA, June 1985.
- [12] L. Sciavicco and B. Siciliano, "Solving the inverse kinematic problem for robotic manipulators," 6th CISM-IFTOMM Ro.Man.Sy, Cracow, Poland, Sept. 1986.

- [13] L. Sciavicco and B. Siciliano, "A dynamic solution to the inverse kinematic problem for redundant manipulators," IEEE J. Rob. Autom., publ. pending, 1986.

8. CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

8.1 Sintesi delle conclusioni

I principali risultati dell'attività di ricerca documentati in questa dissertazione possono riassumersi come:

1. Riformulazione delle equazioni cinematiche di un manipolatore, con caratterizzazione rispetto alla configurazione degli assi di rotazione all'organo terminale.
2. Derivazione di un nuovo algoritmo per l' inversione cinematica di una traiettoria desiderata, assegnata nello spazio Cartesiano all'organo terminale; tale algoritmo risulta del tutto indipendente dalla particolare struttura cinematica del manipolatore. Le sue caratteristiche fondamentali sono:
 - a) è richiesto il solo computo di funzioni cinematiche dirette,
 - b) è risolto il problema della non unicità della soluzione, in relazione all'eventualità di avere soluzioni multiple per una stessa configurazione dell'organo terminale,
 - c) le prestazioni in inseguimento, e in particolare quelle a regime, risultano soddisfacenti, stante la struttura a ciclo chiuso del sistema dinamico che realizza l'algoritmo,
 - d) è garantita la possibilità di generare i profili di velocità ai giunti, senza richiedere il computo di ulteriori funzioni.

3. Tale algoritmo è stato poi particolarizzato per tre diverse strutture cinematiche, che si differenziano tra di loro per la diversa configurazione degli ultimi tre assi di rotazione all'organo terminale. Sulla base di opportuni vincoli cinematici per le due strutture che non presentano un polso sferico, è stato possibile partizionare il problema in due stadi, con il vantaggio inerente di alleggerire il carico computazionale, ottenendo delle prestazioni dell'algoritmo ancora migliori. Due esempi di applicazione hanno confermato i risultati anticipati in teoria.
4. Infine si è discussa l'estensione di tale algoritmo al caso dei manipolatori ridondanti. Due tipi di vincoli sono stati considerati: la presenza di ostacoli nello spazio di lavoro del manipolatore e la presenza di limiti meccanici sulla corsa dei giunti. Si è dimostrato come l'attivazione di tali vincoli, in numero al più pari al numero dei gradi di libertà ridondanti del manipolatore, porta alla derivazione di un algoritmo esteso che, pur mantenendo prestazioni soddisfacenti in inseguimento, faccia evitare al manipolatore gli ostacoli e gli stop meccanici. Un semplice esempio di applicazione ha validato i risultati teorici.

8.2 Suggerimenti per il lavoro futuro

Il lavoro presentato in questa dissertazione suggerisce almeno due problemi da investigare per il futuro:

1. Analizzare meglio l'occorrenza di singolarità nello spazio di lavoro di un manipolatore ridondante, fornendo una quantificazione del concetto intuitivo di destrezza del manipolatore. Seguendo quindi una strategia simile a

quella adottata per gli ostacoli e per i limiti meccanici, si può pensare di descrivere una opportuna funzione cinematica diretta estesa che includa la misura di destrezza adottata, e che consenta l'applicazione dell'algoritmo di soluzione proposto.

2. Utilizzare l'algoritmo di inversione cinematica per il controllo dinamico del manipolatore direttamente nello spazio di lavoro (ad es. controllo in forza).
3. Applicare l'algoritmo di soluzione nel contesto di un sistema grafico al calcolatore per la valutazione delle prestazioni del manipolatore.

APPENDICE 1

La Fig. 3.7 illustra il manipolatore di Stanford a sei gradi di libertà. La maniera in cui si ricava l'equazione cinematica di tale manipolatore è stata ampiamente descritta nel § 3.4.1. Qui si vogliono riportare le espressioni delle funzioni cinematiche dirette necessarie all'applicazione dell'algoritmo di soluzione descritto nel § 6.3. Pertanto si ha che le funzioni cinematiche dirette in (6.10) e (6.11) risultano

$$\underline{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 l_1 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 l_1 \\ c_2 d_3 + l_0 \end{bmatrix} \quad (A1.1)$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6] - s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6] + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix} \quad (A1.2)$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

Risulta inoltre $\underline{p} = \underline{p}' + d_6 \underline{a}$.

Differenziando $\underline{p}'$ rispetto a $\underline{q}_p$ ed $\underline{s}$, $\underline{a}$ rispetto a $\underline{q}_p$ e $\underline{q}_h$, si ottengono le matrici Jacobiane definite in (6.12) e (6.13), le quali in forma compatta possono venire scritte come

$$J_p = (\underline{z}_0 \times \underline{p}' \mid \underline{y}_1 \times \underline{p}' \mid \underline{y}_4) \quad (A1.3)$$

$$\begin{aligned}
J_{sp} &= (\underline{z}_0 \times \underline{s} \mid \underline{y}_1 \times \underline{s} \mid \underline{0}) & J_s &= (\underline{y}_4 \times \underline{s} \mid s_6 \underline{a} \mid -\underline{n}) \\
J_{ap} &= (\underline{z}_0 \times \underline{s} \mid \underline{y}_1 \times \underline{a} \mid \underline{0}) & J_a &= (\underline{y}_4 \times \underline{a} \mid c_6 \underline{n} - s_6 \underline{s} \mid \underline{0})
\end{aligned}
\tag{A1.4}$$

ove si può riconoscere che $\underline{z}_0 = (0 \ 0 \ 1)^T$, $\underline{y}_1 = (-s_1 \ c_1 \ 0)^T$, $\underline{y}_4 = (c_1 s_2 \ s_1 s_2 \ c_2)^T$, $\underline{0} = (0 \ 0 \ 0)^T$, ed $\underline{n} = \underline{s} \times \underline{a}$. E' da sottolineare come, nel derivare tali Jacobiani, siano state effettuate delle semplificazioni in modo da esprimerli in funzione delle variabili cinematiche già calcolate in (A1.1) e (A1.2), riducendo così il numero di operazioni da effettuare.

APPENDICE 2

La Fig. 3.8 illustra il manipolatore prototipo a sei gradi di libertà. La maniera di ottenere la sua equazione cinematica è stata ampiamente illustrata nel § 3.4.2. Qui si vogliono riportare le espressioni delle funzioni cinematiche dirette necessarie all'applicazione dell'algoritmo di soluzione descritto nel § 6.4. Pertanto si ha che le funzioni cinematiche dirette nelle (6.33) (6.34) e (6.42) risultano

$$\underline{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(d_5c_2s_4+a_2c_2+s_2d_3)-s_1d_5c_4 \\ s_1(d_5c_2s_4+a_2c_2+s_2d_3)+c_1d_5c_4 \\ d_5s_2s_4+a_2s_2-c_2d_3 \end{bmatrix} \quad (A2.1)$$

$$\underline{z}_4 = \begin{bmatrix} c_1c_2s_4-s_1c_4 \\ s_1c_2s_4+c_1c_4 \\ s_2s_4 \end{bmatrix} \quad (A2.2)$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1[-c_2(c_4c_5s_6+s_4c_6)-s_2s_5s_6]-s_1(s_4c_5s_6-c_4c_6) \\ s_1[-c_2(c_4c_5s_6+s_4c_6)-s_2s_5s_6]+c_1(s_4c_5s_6-c_4c_6) \\ -s_2(c_4c_5s_6+s_4c_6)+c_2s_5s_6 \end{bmatrix} \quad (A2.3)$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(-c_2c_4s_5+s_2c_5)-s_1s_4s_5 \\ s_1(-c_2c_4s_5+s_2c_5)+c_1s_4s_5 \\ -s_2c_4s_5-c_2c_5 \end{bmatrix}$$

Risulta inoltre $\underline{p} = \underline{p}' + d_6\underline{a}$.

Differenziando $\underline{p}', \underline{z}_4$ rispetto a $\underline{q}_p$ ed $\underline{s}, \underline{a}$ rispetto a $\underline{q}_p$ e $\underline{q}_h$, si ottengono le matrici Jacobiane definite nelle (6.36) e (6.42), le quali in forma compatta possono venir scritte come

$$J_p = (\underline{z}_0 \times \underline{p}' \mid \underline{y}_1 \times \underline{p}' \mid \underline{y}_4 \mid d_5\underline{x}_4)$$

(A2.4)

$$J_{z4} = (\underline{z}_0 \times \underline{z}_4 \mid -s_4 \underline{y}_4 \mid \underline{0} \mid \underline{x}_4)$$

ove si può riconoscere che $\underline{z}_0 = (0 \ 0 \ 1)^T$, $\underline{y}_1 = (s_1 \ -c_1 \ 0)^T$, $\underline{y}_4 = (c_1 s_2 \ s_1 s_2 \ -c_2)^T$, $\underline{0} = (0 \ 0 \ 0)^T$, e $\underline{x}_4 = \underline{y}_4 \times \underline{z}_4$, ed inoltre

$$J_{sp} = (\underline{z}_0 \times \underline{s} \mid \underline{y}_1 \times \underline{s} \mid \underline{0} \mid \underline{y}_4 \times \underline{s}) \quad J_s = (-s_6 \underline{a} \mid -\underline{n}) \quad (A2.5)$$

$$J_{ap} = (\underline{z}_0 \times \underline{a} \mid \underline{y}_1 \times \underline{a} \mid \underline{0} \mid \underline{y}_4 \times \underline{a}) \quad J_a = (-c_6 \underline{n} + s_6 \underline{s} \mid \underline{0})$$

ove $\underline{n} = \underline{s} \times \underline{a}$.